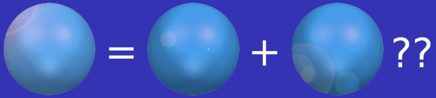
Das Banach-Tarski-Paradoxon

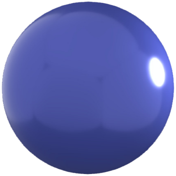


Immanuel van Santen

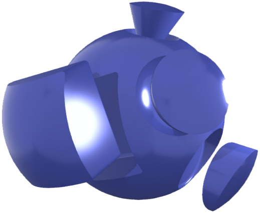
24. Mai 2022

Die Aussage des Banach-Tarski-Paradoxons

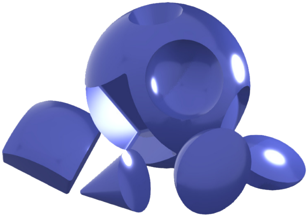
Wir starten mit einer vollen Kugel K.



Wir starten mit einer vollen Kugel K.
Diese Kugel kann nun in n Teile zerlegt werden, so dass

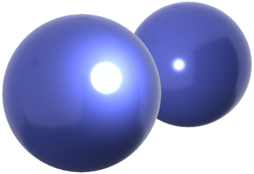


Wir starten mit einer vollen Kugel K. Diese Kugel kann nun in n Teile zerlegt werden, so dass durch Bewegungen im Raum diese Teile



Die Aussage des Banach-Tarski-Paradoxons

Wir starten mit einer vollen Kugel K. Diese Kugel kann nun in n Teile zerlegt werden, so dass durch Bewegungen im Raum diese Teile zu zwei gleichgroßen Kugeln wie K zusammengesetzt werden können.

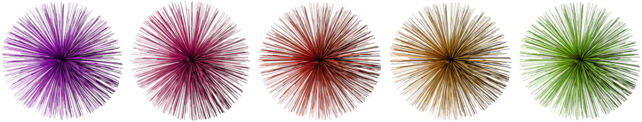


Einige Anmerkungen

Die Teile der Kugelzerlegung sehen eher “stachelig” aus:

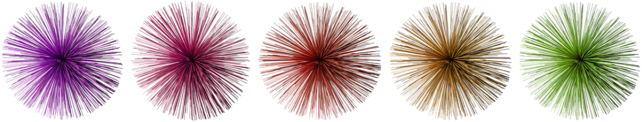
Einige Anmerkungen

Die Teile der Kugelzerlegung sehen eher “stachelig” aus:



Einige Anmerkungen

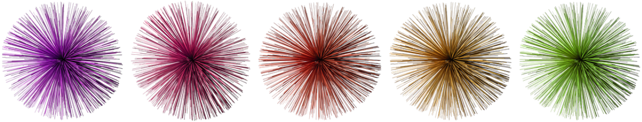
Die Teile der Kugelzerlegung sehen eher “stachelig” aus:



Diesen Mengen kann kein “vernünftiges” Volumen zugeordnet werden.

Einige Anmerkungen

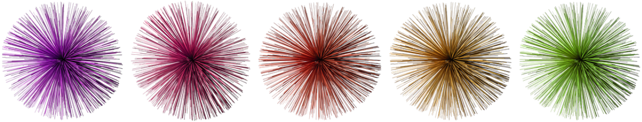
Die Teile der Kugelzerlegung sehen eher “stachelig” aus:



Diesen Mengen kann kein “vernünftiges” Volumen zugeordnet werden. Diese Erkenntnis war von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis von Maßen von Teilmengen des Euklidischen Raumes.

Einige Anmerkungen

Die Teile der Kugelzerlegung sehen eher “stachelig” aus:

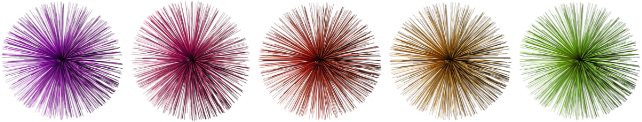


Diesen Mengen kann kein “vernünftiges” Volumen zugeordnet werden. Diese Erkenntnis war von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis von Maßen von Teilmengen des Euklidischen Raumes.

Die Existenz einer paradoxen Kugelzerlegung in n Teile wurde von Stefan Banach und Alfred Tarski 1924 bewiesen.

Einige Anmerkungen

Die Teile der Kugelzerlegung sehen eher "stachelig" aus:



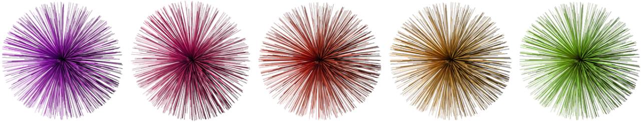
Diesen Mengen kann kein "vernünftiges" Volumen zugeordnet werden. Diese Erkenntnis war von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis von Maßen von Teilmengen des Euklidischen Raumes.

Die Existenz einer paradoxen Kugelzerlegung in n Teile wurde von Stefan Banach und Alfred Tarski 1924 bewiesen.

Raphael Robinson bewies 1947, dass $n = 5$ möglich und minimal ist.

Einige Anmerkungen

Die Teile der Kugelzerlegung sehen eher "stachelig" aus:



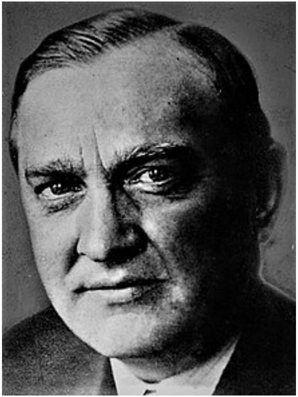
Diesen Mengen kann kein "vernünftiges" Volumen zugeordnet werden. Diese Erkenntnis war von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis von Maßen von Teilmengen des Euklidischen Raumes.

Die Existenz einer paradoxen Kugelzerlegung in n Teile wurde von Stefan Banach und Alfred Tarski 1924 bewiesen.

Raphael Robinson bewies 1947, dass $n = 5$ möglich und minimal ist.

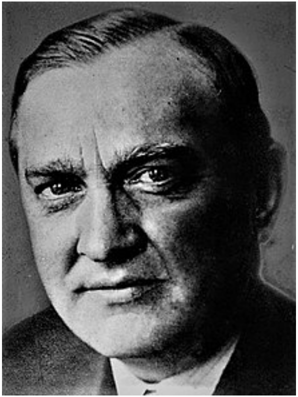
Das Banach-Tarski-Paradoxon fällt in die Zeit, wo auch Kurt Gödel seine Unvollständigkeitssätze bewies.

Die Autoren



Stefan Banach (1892-1945)
polnischer Mathematiker

Die Autoren



Stefan Banach (1892-1945)
polnischer Mathematiker

Alfred Tarski (1901-1983)
polnisch-US-amerikanischer
Mathematiker und Logiker

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden.

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}},$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}},$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}},$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \}.$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \}.$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots\}.$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \}.$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(ab^2 a^{-2}) =$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \}.$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(a b^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) =$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \}.$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(a b^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) = a^2 b a^{-2}.$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \dots,}_{\text{Wörter der Länge 2}} \dots \} .$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(ab^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) = a^2 ba^{-2} .$$

Wörter können invertiert werden:

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \}.$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(a b^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) = a^2 b a^{-2}.$$

Wörter können invertiert werden:

$$(a^2 b a^{-1})^{-1} =$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \} .$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(ab^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) = a^2 ba^{-2} .$$

Wörter können invertiert werden:

$$(a^2 ba^{-1})^{-1} = ab^{-1} a^{-2} ,$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \} .$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(ab^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) = a^2 ba^{-2} .$$

Wörter können invertiert werden:

$$(a^2 ba^{-1})^{-1} = ab^{-1}a^{-2} , \quad \text{denn:}$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \}.$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(ab^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) = a^2 ba^{-2}.$$

Wörter können invertiert werden:

$$(a^2 ba^{-1})^{-1} = ab^{-1}a^{-2}, \quad \text{denn: } (a^2 ba^{-1})(ab^{-1}a^{-2}) =$$

Wörter in a, b, a^{-1}, b^{-1}

$\mathbb{F}_2$ besteht aus allen Wörtern in den Symbolen a, b, a^{-1}, b^{-1}, wobei aa^{-1}, $a^{-1}a$ und analoge Kombinationen gekürzt werden. Weiter schreiben wir a^2 anstatt aa usw.

$$\mathbb{F}_2 = \{ \underbrace{\varepsilon}_{\text{leeres Wort}}, \underbrace{a, b, a^{-1}, b^{-1}}_{\text{Wörter der Länge 1}}, \underbrace{a^2, ab, ab^{-1}, ba, \ldots}_{\text{Wörter der Länge 2}}, \ldots \} .$$

Insbesondere können die Wörter aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden.

Wörter können zusammengesetzt werden:

$$(a^2 b^{-1} a^{-1})(ab^2 a^{-2}) = (a^2 b^{-1})(b^2 a^{-2}) = a^2 ba^{-2} .$$

Wörter können invertiert werden:

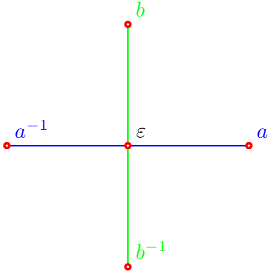
$$(a^2 ba^{-1})^{-1} = ab^{-1} a^{-2} , \quad \text{denn: } (a^2 ba^{-1})(ab^{-1} a^{-2}) = \varepsilon .$$

Visualisierung von $\mathbb{F}_2$

Wörter der Länge 0 und 1:

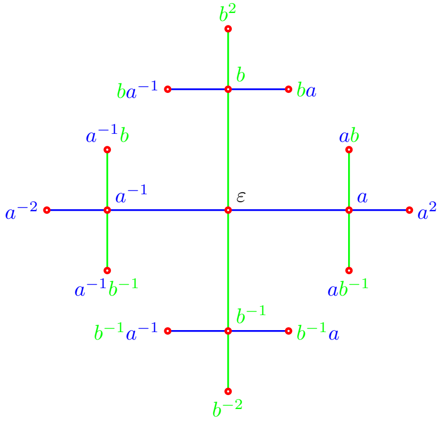
Visualisierung von $\mathbb{F}_2$

Wörter der Länge 0 und 1:

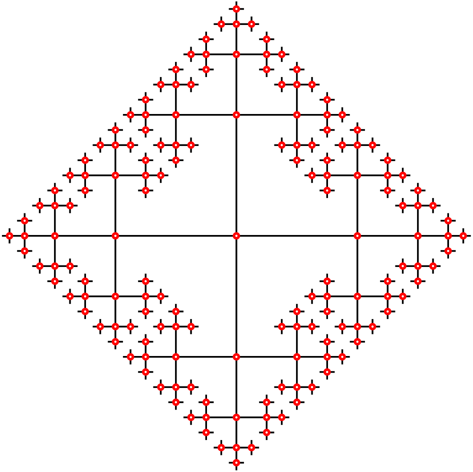


Visualisierung von $\mathbb{F}_2$

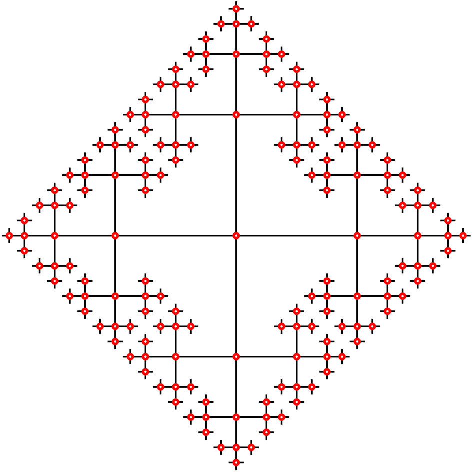
Wörter der Länge 0, 1 und 2:



Wörter der Länge 0 bis 5:

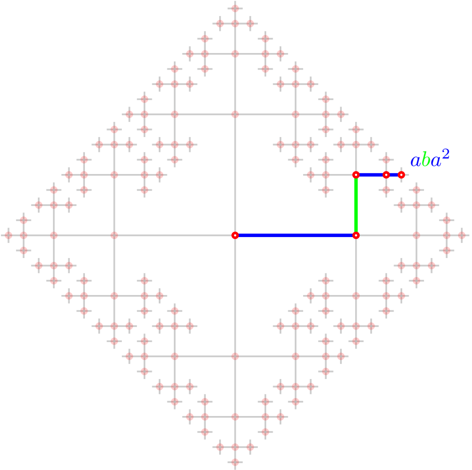


Wörter der Länge 0 bis 5: Zum Beispiel das Wort aba^2:



Visualisierung von $\mathbb{F}_2$

Wörter der Länge 0 bis 5: Zum Beispiel das Wort aba^2:



Wozu ist $\mathbb{F}_2$ nützlich?

Wozu ist $\mathbb{F}_2$ nützlich?

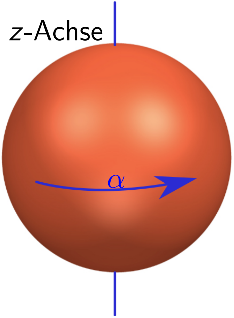
Die Wörter aus $\mathbb{F}_2 = \{\varepsilon, a, b, a^{-1}, b^{-1}, \ldots\}$ können als Bewegungen der Kugeloberfläche S^2 interpretiert werden.

Wozu ist $\mathbb{F}_2$ nützlich?

Die Wörter aus $\mathbb{F}_2 = \{\varepsilon, a, b, a^{-1}, b^{-1}, \ldots\}$ können als Bewegungen der Kugeloberfläche S^2 interpretiert werden. Dazu wählen wir zwei Winkel α, β und zwei Rotationsachsen.

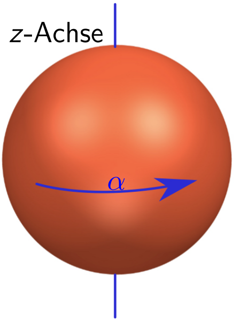
Wozu ist $\mathbb{F}_2$ nützlich?

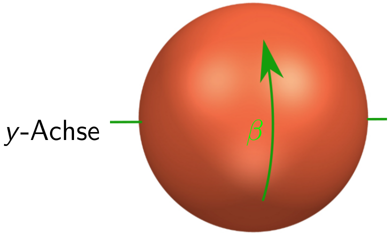
Die Wörter aus $\mathbb{F}_2 = \{\varepsilon, a, b, a^{-1}, b^{-1}, \ldots\}$ können als Bewegungen der Kugeloberfläche S^2 interpretiert werden. Dazu wählen wir zwei Winkel α, β und zwei Rotationsachsen.



a wird als Rotation bezüglich der z-Achse um den Winkel α interpretiert

Die Wörter aus $\mathbb{F}_2 = \{\varepsilon, a, b, a^{-1}, b^{-1}, \ldots\}$ können als Bewegungen der Kugeloberfläche S^2 interpretiert werden. Dazu wählen wir zwei Winkel α, β und zwei Rotationsachsen.





a wird als Rotation bezüglich der z-Achse um den Winkel α interpretiert

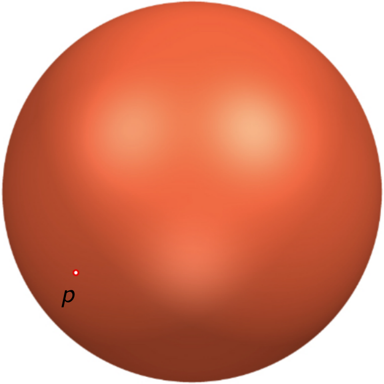
b wird als Rotation bezüglich der y-Achse um den Winkel β interpretiert

Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

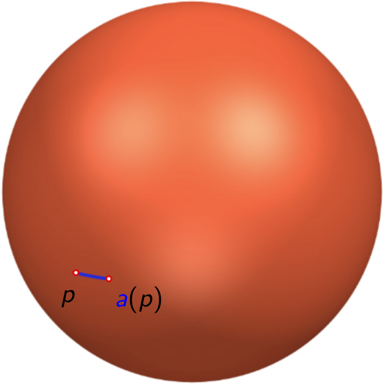
Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:

Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:

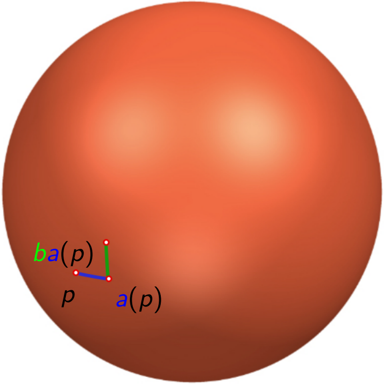


Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:



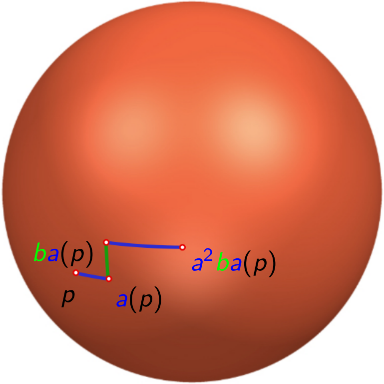
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:



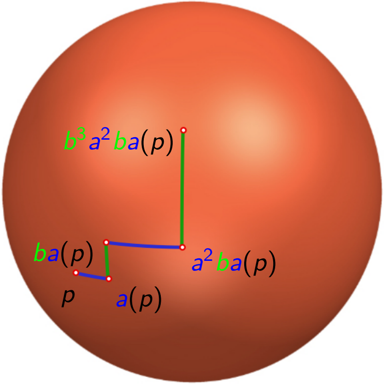
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:



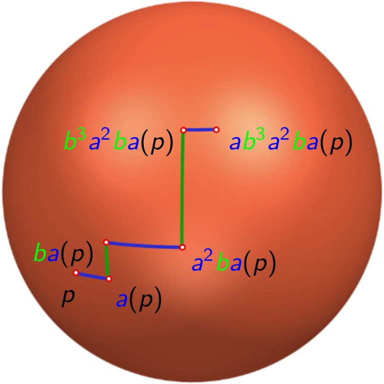
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:



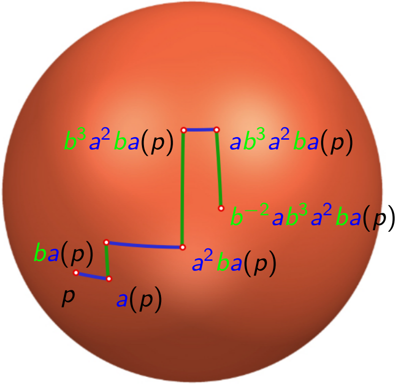
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:



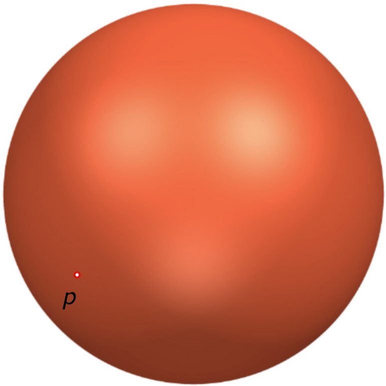
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Zum Beispiel wird $b^{-2}ab^3a^2ba$ wie folgt interpretiert:



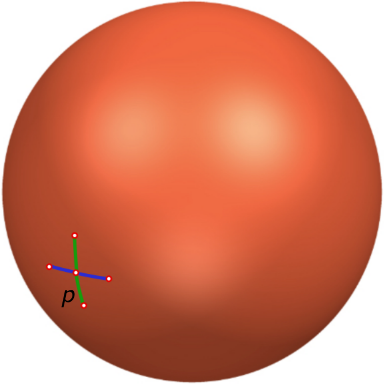
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Punkte, die durch Wörter der Länge 0 und 1 von p erreicht werden:



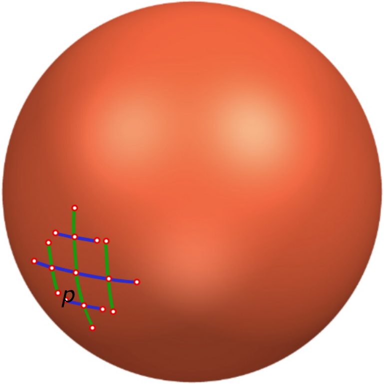
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Punkte, die durch Wörter der Länge 0 und 1 von p erreicht werden:



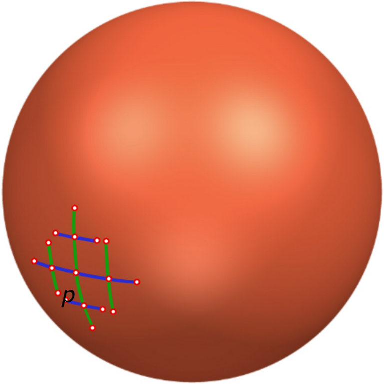
Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Punkte, die durch Wörter der Länge $0, 1$ und 2 von p erreicht werden:



Wörter als Bewegungen von S^2 interpretieren

Punkte, die durch Wörter der Länge $0, 1$ und 2 von p erreicht werden:



Die Gesamtheit aller Punkte aus S^2, die mit Wörtern aus $\mathbb{F}_2$ von p aus erreicht werden, heißt **Orbit** von p und wird als $\mathbb{F}_2(p)$ notiert.

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ von M,

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ von M,
- natürliche Zahlen $n' \leq n$, $m' \leq m$ und

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ von M,
- natürliche Zahlen $n' \leq n$, $m' \leq m$ und
- Bewegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}$, $\tau_1, \ldots, \tau_{m'}$

finden,

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ von M,
- natürliche Zahlen $n' \leq n$, $m' \leq m$ und
- Bewegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}, \tau_1, \ldots, \tau_{m'}$

finden, so dass gilt

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ von M,
- natürliche Zahlen $n' \leq n$, $m' \leq m$ und
- Bewegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}, \tau_1, \ldots, \tau_{m'}$

finden, so dass gilt

$$M = A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$$

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ von M,
- natürliche Zahlen $n' \leq n$, $m' \leq m$ und
- Bewegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}$, $\tau_1, \ \ldots, \tau_{m'}$

finden, so dass gilt

$$\begin{aligned} M &= A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m \\ &= \sigma_1(A_1) \cup \ldots \cup \sigma_{n'}(A_{n'}) \end{aligned}$$

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ und $B_1, \ldots, B_m$ von M,
- natürliche Zahlen $n' \leq n$, $m' \leq m$ und
- Bewegungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}$, $\tau_1, \ \ldots, \tau_{m'}$

finden, so dass gilt

$$\begin{aligned} M &= A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m \\ &= \sigma_1(A_1) \cup \ldots \cup \sigma_{n'}(A_{n'}) \\ &= \tau_1(B_1) \cup \ldots \cup \tau_{m'}(B_{m'}), \end{aligned}$$

Definition einer paradoxen Zerlegung

Sei M eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Falls wir

- Teilmengen $A_1, \dots, A_n$ und $B_1, \dots, B_m$ von M,
- natürliche Zahlen $n' \leq n$, $m' \leq m$ und
- Bewegungen $\sigma_1, \dots, \sigma_{n'}$, $\tau_1, \ \dots, \tau_{m'}$

finden, so dass gilt

$$\begin{aligned} M &= A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m \\ &= \sigma_1(A_1) \cup \ldots \cup \sigma_{n'}(A_{n'}) \\ &= \tau_1(B_1) \cup \ldots \cup \tau_{m'}(B_{m'}), \end{aligned}$$

dann sprechen wir von einer **paradoxen Zerlegung** von M.

Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Wir betrachten die folgenden disjunkten Teilmengen von $\mathbb{F}_2$:

Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Wir betrachten die folgenden disjunkten Teilmengen von $\mathbb{F}_2$:

$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\}$ = Wörter, die mit a beginnen

Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Wir betrachten die folgenden disjunkten Teilmengen von $\mathbb{F}_2$:

$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\}$ = Wörter, die mit a beginnen

$F_{a^{-1}} = \{a^{-1}, a^{-1}b, a^{-2}, \ldots\}$ = Wörter, die mit a^{-1} beginnen

Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Wir betrachten die folgenden disjunkten Teilmengen von $\mathbb{F}_2$:

$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\} =$ Wörter, die mit a beginnen

$F_{a^{-1}} = \{a^{-1}, a^{-1}b, a^{-2}, \ldots\} =$ Wörter, die mit a^{-1} beginnen

$F_b = \{b, ba, b^2, ba^{-1}, \ldots\} =$ Wörter, die mit b beginnen

Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Wir betrachten die folgenden disjunkten Teilmengen von $\mathbb{F}_2$:

$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\}$ = Wörter, die mit a beginnen

$F_{a^{-1}} = \{a^{-1}, a^{-1}b, a^{-2}, \ldots\}$ = Wörter, die mit a^{-1} beginnen

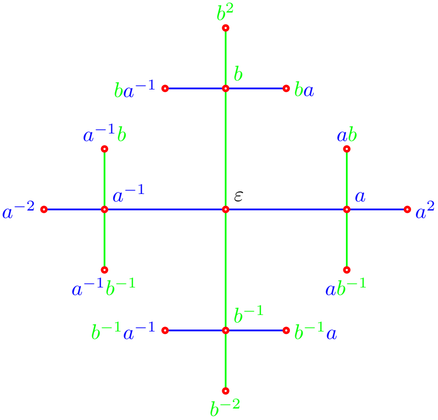
$F_b = \{b, ba, b^2, ba^{-1}, \ldots\}$ = Wörter, die mit b beginnen

$F_{b^{-1}} = \{b^{-1}, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, \ldots\}$ = Wörter, die mit b^{-1} beginnen

Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

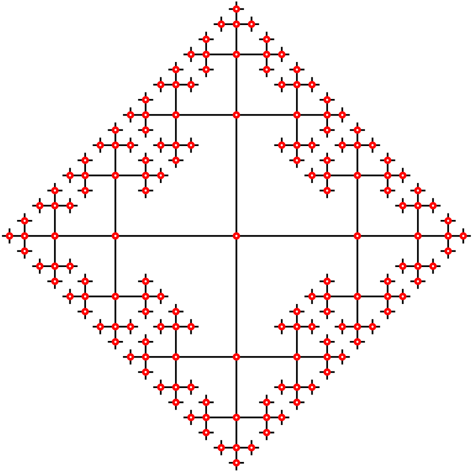
Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:

Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:



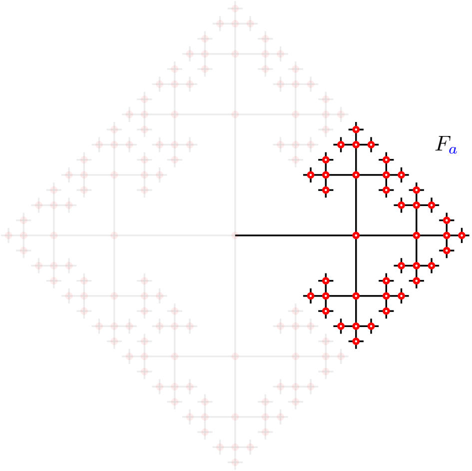
Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:



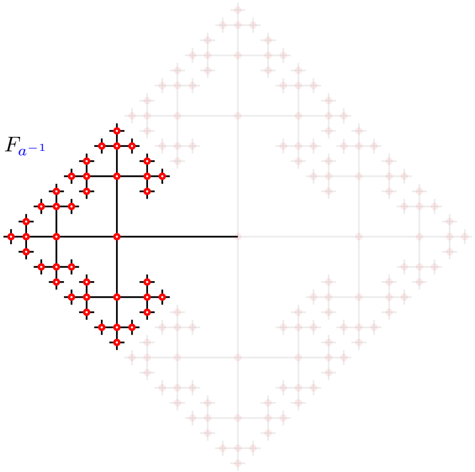
Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:

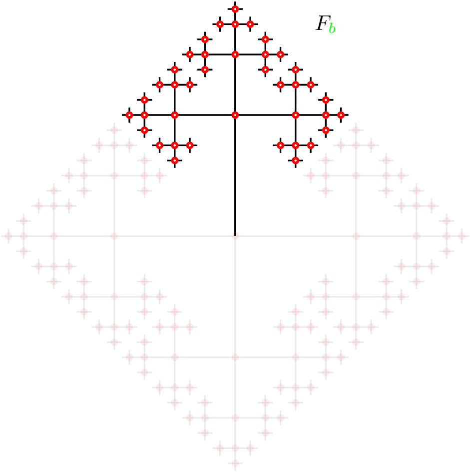


Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:

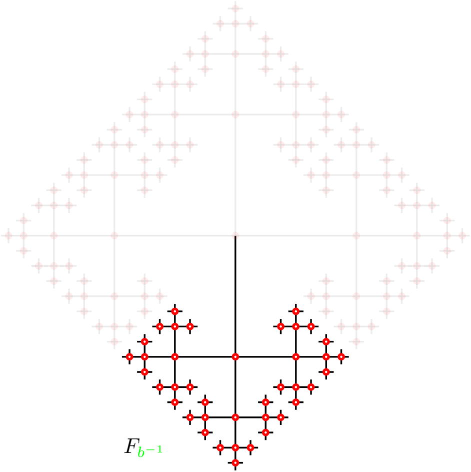


Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:



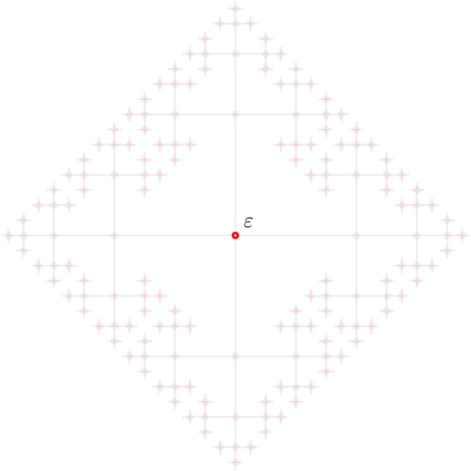
Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:



Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Es gilt $\mathbb{F}_2 = F_a \cup F_{a^{-1}} \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\}$, denn:

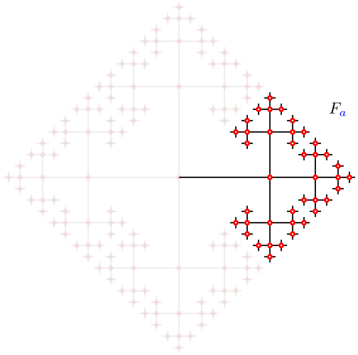


Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Es gilt $\mathbb{F}_2 = (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}}$, denn:

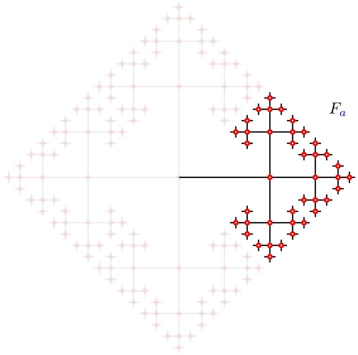
Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

Es gilt $\mathbb{F}_2 = (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}}$, denn:



$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\}$

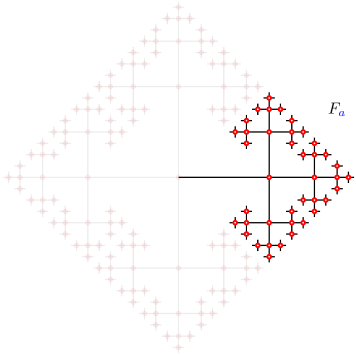
Es gilt $\mathbb{F}_2 = (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}}$, denn:



$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\}$

$a^{-1}F_a$

Es gilt $\mathbb{F}_2 = (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}}$, denn:

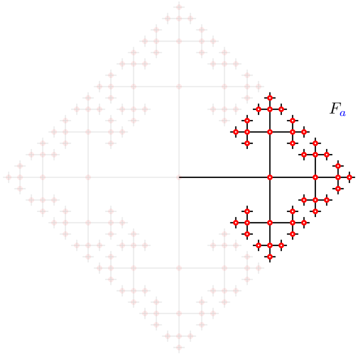


$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\}$

$a^{-1}F_a = \{\varepsilon, a, b, b^{-1}, \ldots\}$

Erste Annäherung an eine paradoxe Zerlegung

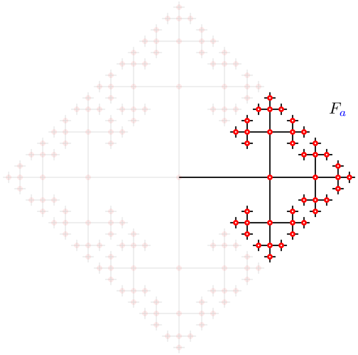
Es gilt $\mathbb{F}_2 = (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}}$, denn:

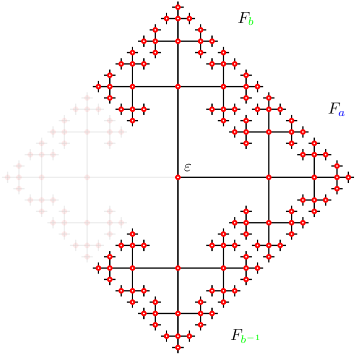


$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \dots\}$

$$\begin{aligned} a^{-1}F_a &= \{\varepsilon, a, b, b^{-1}, \dots\} \\ &= F_a \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

Es gilt $\mathbb{F}_2 = (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}}$, denn:

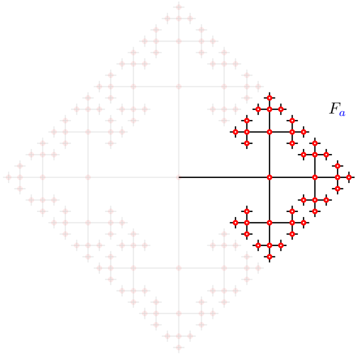


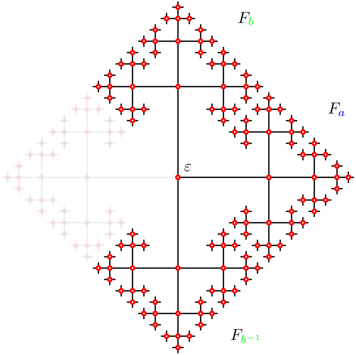


$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \ldots\}$

$$\begin{aligned} a^{-1}F_a &= \{\varepsilon, a, b, b^{-1}, \ldots\} \\ &= F_a \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

Es gilt $\mathbb{F}_2 = (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}}$, denn:





$F_a = \{a, a^2, ab, ab^{-1}, \dots\}$

$$\begin{aligned} a^{-1}F_a &= \{\varepsilon, a, b, b^{-1}, \dots\} \\ &= F_a \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

Analog gilt auch $\mathbb{F}_2 = (b^{-1}F_b) \cup F_{b^{-1}}$.

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

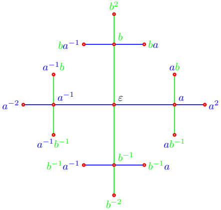
Sei p ein Element von S^2.

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:

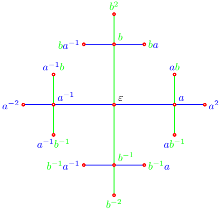
Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

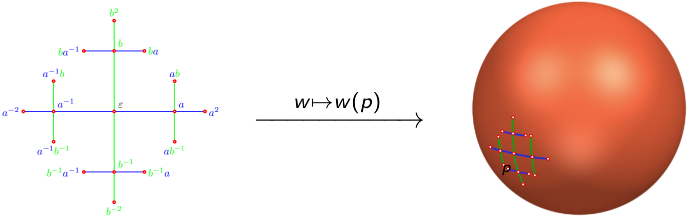
Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



$$\xrightarrow{w \mapsto w(p)}$$

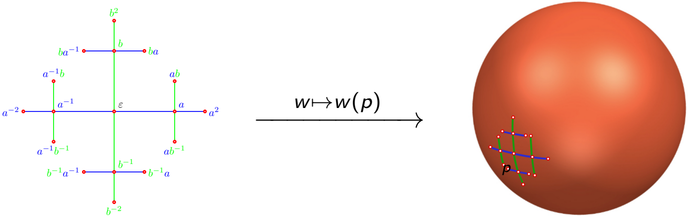
Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

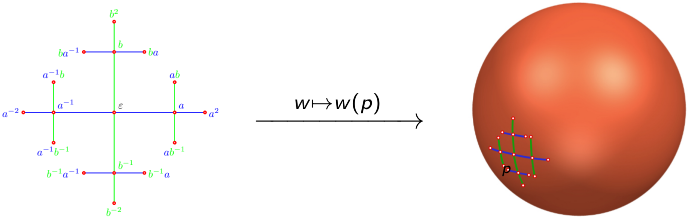
Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:

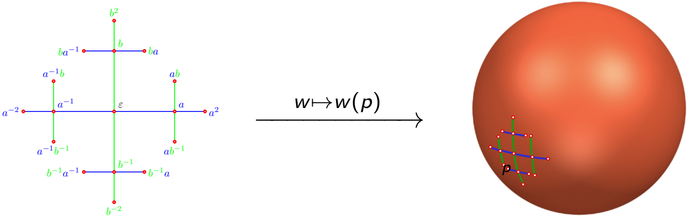


Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

$$\mathbb{F}_2 \quad = \quad F_a \cup F_{a^{-1}}$$

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

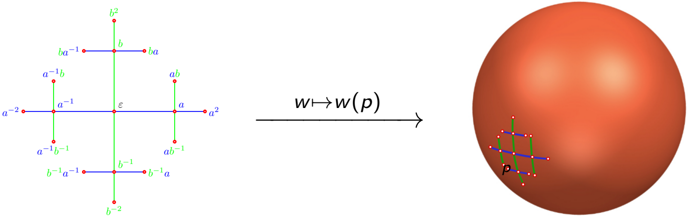
Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 \quad = \quad & F_a \cup F_{a^{-1}} \\ & \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:

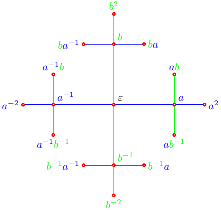


Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

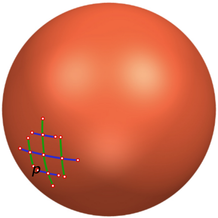
$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 &= F_a \cup F_{a^{-1}} \\ &\quad \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \\ &= (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}} \end{aligned}$$

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



$$\xrightarrow{w \mapsto w(p)}$$

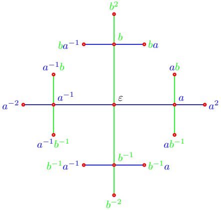


Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

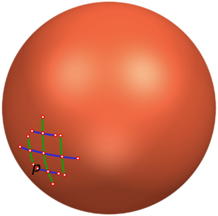
$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_2 &= F_a \cup F_{a^{-1}} \\
&\quad \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \\
&= (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}} \\
&= (b^{-1}F_b) \cup F_{b^{-1}}
\end{aligned}$$

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



$$\xrightarrow{\quad w \mapsto w(p) \quad}$$



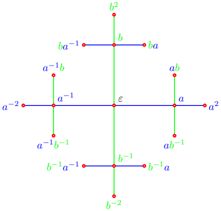
Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_2 &= F_a \cup F_{a^{-1}} \\
&\quad \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \\
&= (a^{-1} F_a) \cup F_{a^{-1}} \\
&= (b^{-1} F_b) \cup F_{b^{-1}}
\end{aligned}$$

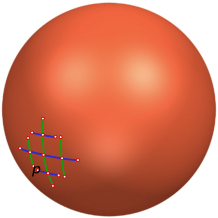
$$\mathbb{F}_2(p) = F_a(p) \cup F_{a^{-1}}(p)$$

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



$$\xrightarrow{w \mapsto w(p)}$$

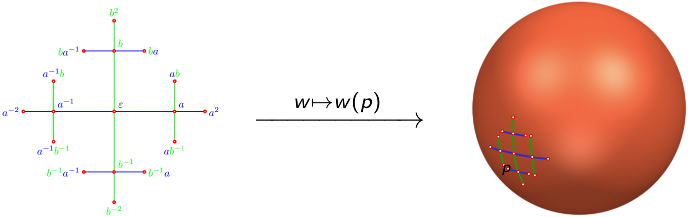


Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 &= F_a \cup F_{a^{-1}} \\ &\quad \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \\ &= (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}} \\ &= (b^{-1}F_b) \cup F_{b^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2(p) &= F_a(p) \cup F_{a^{-1}}(p) \\ &\quad \cup F_b(p) \cup F_{b^{-1}}(p) \cup \{p\} \end{aligned}$$

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



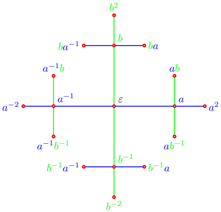
Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 &= F_a \cup F_{a^{-1}} \\ &\quad \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \\ &= (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}} \\ &= (b^{-1}F_b) \cup F_{b^{-1}} \end{aligned}$$

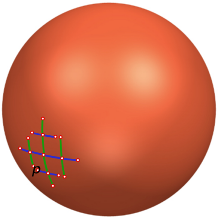
$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2(p) &= F_a(p) \cup F_{a^{-1}}(p) \\ &\quad \cup F_b(p) \cup F_{b^{-1}}(p) \cup \{p\} \\ &= a^{-1}(F_a(p)) \cup F_{a^{-1}}(p) \end{aligned}$$

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



$$\xrightarrow{w \mapsto w(p)}$$

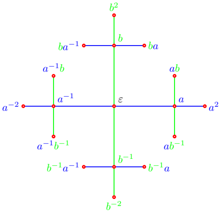


Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

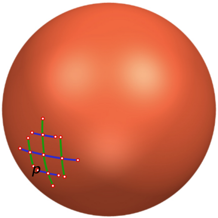
$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_2 &= F_a \cup F_{a^{-1}} \\
&\quad \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \\
&= (a^{-1} F_a) \cup F_{a^{-1}} \\
&= (b^{-1} F_b) \cup F_{b^{-1}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathbb{F}_2(p) &= F_a(p) \cup F_{a^{-1}}(p) \\
&\quad \cup F_b(p) \cup F_{b^{-1}}(p) \cup \{p\} \\
&= a^{-1}(F_a(p)) \cup F_{a^{-1}}(p) \\
&= b^{-1}(F_b(p)) \cup F_{b^{-1}}(p)
\end{aligned}$$

Paradoxe Zerlegung eines typischen Orbits

Sei p ein Element von S^2. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$, welche ein Wort w aus $\mathbb{F}_2$ auf $w(p)$ schickt:



$$\xrightarrow{w \mapsto w(p)}$$



Wenn die Abbildung $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2(p)$ eineindeutig (d.h. bijektiv) ist, dann nennen wir $\mathbb{F}_2(p)$ einen **typischen Orbit**.

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_2 &= F_a \cup F_{a^{-1}} \\
&\quad \cup F_b \cup F_{b^{-1}} \cup \{\varepsilon\} \\
&= (a^{-1}F_a) \cup F_{a^{-1}} \\
&= (b^{-1}F_b) \cup F_{b^{-1}}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathbb{F}_2(p) &= F_a(p) \cup F_{a^{-1}}(p) \\
&\quad \cup F_b(p) \cup F_{b^{-1}}(p) \cup \{p\} \\
&= a^{-1}(F_a(p)) \cup F_{a^{-1}}(p) \\
&= b^{-1}(F_b(p)) \cup F_{b^{-1}}(p)\,.
\end{aligned}$$

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite.

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

Wenn α und β allgemein gewählt werden,

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

Wenn α und β allgemein gewählt werden,
dann können die Elemente von $S^2 \setminus V$ abgezählt werden.

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

$$\Big\Downarrow \begin{array}{l}\text{Wenn } \alpha \text{ und } \beta \text{ allgemein gewählt werden,} \\ \text{dann können die Elemente von } S^2 \setminus V \text{ abgezählt werden.}\end{array}$$

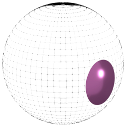
Paradoxe Zerlegung von S^2

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

$$\Big\Downarrow \begin{array}{l}\text{Wenn } \alpha \text{ und } \beta \text{ allgemein gewählt werden,} \\ \text{dann können die Elemente von } S^2 \setminus V \text{ abgezählt werden.}\end{array}$$

Paradoxe Zerlegung von S^2

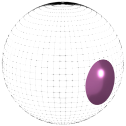


Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

$\Downarrow$ Wenn α und β allgemein gewählt werden, dann können die Elemente von $S^2 \setminus V$ abgezählt werden.

Paradoxe Zerlegung von S^2



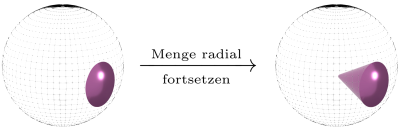
$\xrightarrow[\text{fortsetzen}]{\text{Menge radial}}$

Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

$\Big\Downarrow$ Wenn α und β allgemein gewählt werden,
dann können die Elemente von $S^2 \setminus V$ abgezählt werden.

Paradoxe Zerlegung von S^2



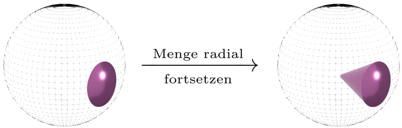
Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

$\Big\Downarrow$ Wenn α und β allgemein gewählt werden,
dann können die Elemente von $S^2 \setminus V$ abgezählt werden.

Paradoxe Zerlegung von S^2

$\Downarrow$



Paradoxe Zerlegung von $K \setminus \{0\}$.

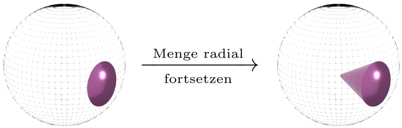
Paradoxe Zerlegung von S^2 und der vollen Kugel K

Es sei V die Vereinung aller typischen Orbite. Durch die Wahl eines Punktes in jedem typischen Orbit erhalten wir mittels Vereinigung der soeben gefundenen paradoxen Zerlegungen der typischen Orbite eine paradoxe Zerlegung von V.

$\Downarrow$ Wenn α und β allgemein gewählt werden,
dann können die Elemente von $S^2 \setminus V$ abgezählt werden.

Paradoxe Zerlegung von S^2

$\Downarrow$



Paradoxe Zerlegung von $K \setminus \{0\}$. $\Longrightarrow$ Paradoxe Zerlegung von K.

Schluss

<u>Frage</u>: Was ist ein Anagramm
von Banach-Tarski?

Schluss

Frage: Was ist ein Anagramm von Banach-Tarski?

Antwort: Banach-Tarski Banach-Tarski

Schluss

Frage: Was ist ein Anagramm von Banach-Tarski?

Antwort: Banach-Tarski Banach-Tarski

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

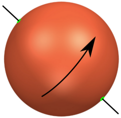
Die Elemente von $S^2 \setminus V$ können abgezählt werden

Wenn wir α, β allgemein wählen, dann gilt Folgendes:

Die Elemente von $S^2 \setminus V$ können abgezählt werden

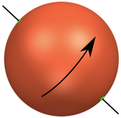
Wenn wir α, β allgemein wählen, dann gilt Folgendes:
Falls $w \neq \varepsilon$ ein beliebiges Wort aus $\mathbb{F}_2$ ist, dann entspricht w einer Rotation der Kugeloberfläche S^2, die nicht die Identität ist (Rechnung).

Wenn wir α, β allgemein wählen, dann gilt Folgendes:
Falls $w \neq \varepsilon$ ein beliebiges Wort aus $\mathbb{F}_2$ ist, dann entspricht w einer Rotation der Kugeloberfläche S^2, die nicht die Identität ist (Rechnung). Diese Rotation hat genau zwei Fixpunkte:



Die Elemente von $S^2 \setminus V$ können abgezählt werden

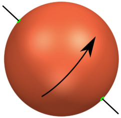
Wenn wir α, β allgemein wählen, dann gilt Folgendes:
Falls $w \neq \varepsilon$ ein beliebiges Wort aus $\mathbb{F}_2$ ist, dann entspricht w einer Rotation der Kugeloberfläche S^2, die nicht die Identität ist (Rechnung). Diese Rotation hat genau zwei Fixpunkte:



Falls p im Komplement $S^2 \setminus V$ liegt (d.h. in keinem typischen Orbit), dann gibt es $w \neq v$ aus $\mathbb{F}_2$ mit $w(p) = v(p)$.

Die Elemente von $S^2 \setminus V$ können abgezählt werden

Wenn wir α, β allgemein wählen, dann gilt Folgendes:
Falls $w \neq \varepsilon$ ein beliebiges Wort aus $\mathbb{F}_2$ ist, dann entspricht w einer Rotation der Kugeloberfläche S^2, die nicht die Identität ist (Rechnung). Diese Rotation hat genau zwei Fixpunkte:

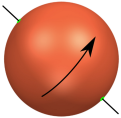


Falls p im Komplement $S^2 \setminus V$ liegt (d.h. in keinem typischen Orbit), dann gibt es $w \neq v$ aus $\mathbb{F}_2$ mit $w(p) = v(p)$. Dies impliziert $v^{-1}w \neq \varepsilon$ und

$$\underbrace{v^{-1}w}_{\text{Rotation}}(p) = p\,.$$

Die Elemente von $S^2 \setminus V$ können abgezählt werden

Wenn wir α, β allgemein wählen, dann gilt Folgendes:
Falls $w \neq \varepsilon$ ein beliebiges Wort aus $\mathbb{F}_2$ ist, dann entspricht w einer Rotation der Kugeloberfläche S^2, die nicht die Identität ist (Rechnung). Diese Rotation hat genau zwei Fixpunkte:



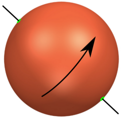
Falls p im Komplement $S^2 \setminus V$ liegt (d.h. in keinem typischen Orbit), dann gibt es $w \neq v$ aus $\mathbb{F}_2$ mit $w(p) = v(p)$. Dies impliziert $v^{-1}w \neq \varepsilon$ und

$$\underbrace{v^{-1}w}_{\text{Rotation}}(p) = p\,.$$

Also ist p ein Fixpunkt von $v^{-1}w$.

Die Elemente von $S^2 \setminus V$ können abgezählt werden

Wenn wir α, β allgemein wählen, dann gilt Folgendes:
Falls $w \neq \varepsilon$ ein beliebiges Wort aus $\mathbb{F}_2$ ist, dann entspricht w einer Rotation der Kugeloberfläche S^2, die nicht die Identität ist (Rechnung). Diese Rotation hat genau zwei Fixpunkte:



Falls p im Komplement $S^2 \setminus V$ liegt (d.h. in keinem typischen Orbit), dann gibt es $w \neq v$ aus $\mathbb{F}_2$ mit $w(p) = v(p)$. Dies impliziert $v^{-1}w \neq \varepsilon$ und

$$\underbrace{v^{-1}w}_{\text{Rotation}}(p) = p\,.$$

Also ist p ein Fixpunkt von $v^{-1}w$. Da die Elemente aus $\mathbb{F}_2$ abgezählt werden können, gilt dies auch für $S^2 \setminus V$.

Paradoxe Zerlegung von S^2

Da die Elemente aus $E = S^2 \setminus V$ abgezählt werden können, kann eine Rotation σ gewählt werden, so dass E und $\sigma^i(E)$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ disjunkt sind.

Da die Elemente aus $E = S^2 \setminus V$ abgezählt werden können, kann eine Rotation σ gewählt werden, so dass E und $\sigma^i(E)$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ disjunkt sind. Wir setzen

$$D = E \cup \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \ldots .$$

Paradoxe Zerlegung von S^2

Da die Elemente aus $E = S^2 \setminus V$ abgezählt werden können, kann eine Rotation σ gewählt werden, so dass E und $\sigma^i(E)$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ disjunkt sind. Wir setzen

$$D = E \cup \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \ldots .$$

Damit erhalten wir $\sigma(D) = \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \sigma^3(E) \cup \ldots = D \setminus E$.

Paradoxe Zerlegung von S^2

Da die Elemente aus $E = S^2 \setminus V$ abgezählt werden können, kann eine Rotation σ gewählt werden, so dass E und $\sigma^i(E)$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ disjunkt sind. Wir setzen

$$D = E \cup \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \ldots .$$

Damit erhalten wir $\sigma(D) = \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \sigma^3(E) \cup \ldots = D \setminus E$. Also haben wir zwei Zerlegungen

$$S^2 = D \cup (S^2 \setminus D) \quad \text{und} \quad S^2 \setminus E = \underbrace{\sigma(D)}_{D \setminus E} \cup (S^2 \setminus D) .$$

Paradoxe Zerlegung von S^2

Da die Elemente aus $E = S^2 \setminus V$ abgezählt werden können, kann eine Rotation σ gewählt werden, so dass E und $\sigma^i(E)$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ disjunkt sind. Wir setzen

$$D = E \cup \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \ldots .$$

Damit erhalten wir $\sigma(D) = \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \sigma^3(E) \cup \ldots = D \setminus E$. Also haben wir zwei Zerlegungen

$$S^2 = D \cup (S^2 \setminus D) \quad \text{und} \quad S^2 \setminus E = \underbrace{\sigma(D)}_{D \setminus E} \cup (S^2 \setminus D) .$$

Die paradoxe Zerlegung von $S^2 \setminus E$ führt dann zu einer von S^2:

Paradoxe Zerlegung von S^2

Da die Elemente aus $E = S^2 \setminus V$ abgezählt werden können, kann eine Rotation σ gewählt werden, so dass E und $\sigma^i(E)$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ disjunkt sind. Wir setzen

$$D = E \cup \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \ldots .$$

Damit erhalten wir $\sigma(D) = \sigma(E) \cup \sigma^2(E) \cup \sigma^3(E) \cup \ldots = D \setminus E$. Also haben wir zwei Zerlegungen

$$S^2 = D \cup (S^2 \setminus D) \quad \text{und} \quad S^2 \setminus E = \underbrace{\sigma(D)}_{D \setminus E} \cup (S^2 \setminus D) .$$

Die paradoxe Zerlegung von $S^2 \setminus E$ führt dann zu einer von S^2: