Lineare Algebra 1 – HS 2021
aktueller Vorlesungsstand

Pierre-Marie Poloni

5. Oktober 2021

Vorsicht!

Dieses Dokument ist kein Vorlesungsskript und kann Vorlesungspräsenz und Vorlesungsmitschrift sicher nicht ersetzen.

Empfohlene Literatur

- *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger*, Gerd Fischer (Springer Verlag).
- *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Max Koecher (Springer-Lehrbuch).
- *Lineare Algebra*, Theo de Jong (Pearson Verlag).
- *Algebra*, Michael Artin (Birkhäuser Verlag).

Die Vorlesung basiert sich auf dem Lehrbuch von Fischer.

Inhaltsverzeichnis

I Vektorräume **1**

I.0 Mengen, Abbildungen, Familien 1

I.1 Gruppen, Körper 2

I.2 Vektorräume, Untervektorräume, Erzeugendensysteme 4

Kapitel I

Vektorräume

I.0 Mengen, Abbildungen, Familien

Definition I.0.1. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (*Elemente* genannt) zu einem Ganzen.

Man schreibt „$x \in M$“, wenn x ein Element der Menge M ist.

Man schreibt „$x \notin M$“, wenn x kein Element von M ist.

Man bezeichnet mit $\emptyset$ die leere Menge.

Definition I.0.2. Seien A und B zwei Mengen.

Man sagt, dass A eine *Teilmenge* von B ist (in Zeichnen $A \subset B$), falls jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Man sagt, dass A und B *gleich* sind (in Zeichnen $A = B$), wenn sie genau dieselben Elemente haben. Nach Definition gilt dann:

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ und } B \subset A).$$

Definition I.0.3. Seien A und B zwei Mengen.

- Die *Vereinigung* von A und B ist $A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$.
- Der *Durchschnitt* von A und B ist $A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$.
- Die *Differenz* von A und B ist $A \setminus B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$.

Definition I.0.4. Das *kartesische Produkt* von endlich viele Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist die Menge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ aller geordneten n-Tupeln $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Sind A eine Menge und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, so setzen wir

$$A^n \coloneqq \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-\text{mal}}.$$

Definition I.0.5. Seien X und Y zwei Mengen. Eine *Abbildung* von X nach Y ist eine Vorschrift f, die zu jedem Element $x \in X$ **genau ein** Element $y \in Y$ zuordnet. Man schreibt dafür:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & y \end{array}$$

Die Menge aller Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$.

Definition I.0.6. Jede Abbildung lässt sich in Form einer *Familie* darstellen. Die Familie $(x_i)_{i \in I}$ entspricht dann der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f\colon & I & \to & X \\ & i & \mapsto & x_i \end{array}$$

Wir bezeichnen mit X^I die Menge aller Familien mit Indexmenge I, deren Glieder in X liegen.

I.1 Gruppen, Körper

Definition I.1.1. Eine *Gruppe* ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, für die folgende Regeln gelten:

(G1) $*$ ist assoziativ, d.h.: Für alle $a, b, c \in G$ gilt

$$(a * b) * c = a * (b * c) =: a * b * c.$$

(G2) Es gibt ein Element $e_G \in G$, *neutrales Element* genannt, für das gilt:

$$e_G * a = a * e_G = a \quad \text{für alle } a \in G.$$

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a_{\text{inv}} \in G$, *inverses Element* zu a genannt, für das gilt:

$$a_{\text{inv}} * a = a * a_{\text{inv}} = e_G.$$

Die Gruppe heisst *kommutativ* oder *abelsch*, falls $a*b = b*a$ für alle $a, b \in G$.

Bemerkung I.1.2. Für jede Gruppe $(G, *)$ gelten folgende Aussagen:

(1) Das neutrale Element e_G ist eindeutig bestimmt.

(2) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element.

(3) Ist $a * b = e_G$, so sind $a_{\text{inv}} = b$ und $b_{\text{inv}} = a$.

(4) Es gelten $(a_{\text{inv}})_{\text{inv}} = a$ und $(a * b)_{\text{inv}} = b_{\text{inv}} * a_{\text{inv}}$ für alle $a, b \in G$.

(5) Die Gleichung $a * x = b$ ist für alle $a, b \in G$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist $x = a_{\mathrm{inv}} * b$.

Definition I.1.3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subset G$ heisst *Untergruppe* von G, wenn H zusammen mit $*$ selbst wieder eine Gruppe ist. D.h., wenn die drei folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $e_G \in H$
- Für alle $a, b \in H$ ist auch $a * b \in H$.
- Für alle $a \in H$ ist $a_{\mathrm{inv}} \in H$.

Definition I.1.4. Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : G \times G \to G \quad \text{und} \quad \cdot : G \times G \to G,$$

für die folgende Regeln gelten:

(K1) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
(Wir bezeichnen mit 0_K das neutrale Element bzg. der $+$ und mit $-a$ das Inverse zu $a \in K$. Weiter schreiben wir „$a - b$“ für „$a + (-b)$“.)

(K2) $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe.
(Wir bezeichnen mit 1_K das neutrale Element bzg. der $\cdot$ und mit a^{-1} das multiplikative Inverse zu $a \in K \setminus \{0_K\}$.)

(K3) Für alle $a, b, c \in K$ gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Bemerkung I.1.5. Für jeden Körper K gelten folgende Aussagen:

(1) $1_K \neq 0_K$. Also hat jeder Körper mindestens zwei Elemente.

(2) $0_K \cdot a = a \cdot 0_K = 0_K$ für alle $a \in K$.

(3) Aus $a \cdot b = 0_K$ folgt $a = 0_K$ oder $b = 0_K$.

(4) $(-1_K) \cdot a = -a$ für alle $a \in K$. Somit $a \cdot (-b) = -a \cdot b$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$.

(5) Aus $a \cdot b = a \cdot c$ mit $a \neq 0_K$ folgt $b = c$.

Lemma I.1.6. Sei K ein endlicher Körper. Dann gibt es eine ganze Zahl $n \geq 2$, so dass

$$\underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n\text{-mal}} = 0_K.$$

Das kleinste solche $n \geq 2$ ist eine Primzahl, *Charakteristik* von K genannt.

Definition I.1.7. Sei $(L, +, \cdot)$ ein Körper. Eine Teilmenge $K \subset L$ heisst *Unterkörper* von L, wenn sie zusammen mit den auf K eingeschränkten Verknüpfungen selbst wieder ein Körper ist. D.h., wenn K folgende Eigenschaften hat:

- $0_L, 1_L \in K$.
- Für alle $a, b \in K$ sind auch $a + b \in K$ und $a \cdot b \in K$.
- Für alle $a \in K \setminus \{0_L\}$ sind $-a \in K$ und $a^{-1} \in K$.

I.2 Vektorräume, Untervektorräume, Erzeugendensysteme

Definition I.2.1. Sei K ein Körper. Ein *Vektorraum* über K (man sagt auch K-Vektorraum) ist eine Menge V mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w \qquad \text{(Addition genannt)}$$

und einer äusseren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \qquad \text{(skalare Multiplikation genannt)}$$

für die folgende Regeln erfüllt sind:

(V1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

(V2) Für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gelten

(a) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$.
(b) $1_K \cdot v = v$.
(c) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.
(d) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Bemerkung I.2.2. Ist V ein K-Vektorraum, so gelten folgende Aussagen:

(1) $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$.

(2) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$ für alle $\alpha \in K$.

(3) $\alpha \cdot v = 0_V \Leftrightarrow (\alpha = 0_K$ oder $v = 0_V)$.

(4) $(-1_K) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

Beispiel I.2.3. Sei K ein beliebiger Körper.

(1) Die Menge $\{0\}$ ist ein K-Vektorraum, *Nullvektorraum* genannt, wobei die Addition und skalare Multiplikation durch $0 + 0 = 0$ und $\alpha \cdot 0 = 0$ für alle $\alpha \in K$ definiert sind.

(2) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist die Menge K^n ein K-Vektorraum, wobei die Addition und skalare Multiplikation komponentenweise definiert sind, d.h., durch die Formeln

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

und

$$\alpha \cdot (v_1, \dots, v_n) = (\alpha \cdot v_1, \dots, \alpha \cdot v_n)$$

für alle $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in K^n$ und alle $\alpha \in K$.

(3) Seien X eine nicht leere Menge und V ein K-Vektorraum. Dann ist die Menge $\mathrm{Abb}(X, V)$ aller Abbildungen von X nach V ein K-Vektorraum, wobei die Addition und skalare Multiplikation punktweise definiert sind, d.h., durch die Formeln

$$f + g \colon x \mapsto f(x) + g(x) \text{ und } \alpha \cdot f \colon x \mapsto \alpha \cdot f(x)$$

für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(X, V)$ und alle $\alpha \in K$.

Definition I.2.4. Eine Teilmenge W eines K-Vektorraums V ist ein *Untervektorraum* von V, wenn gelten:

(UV1) $W \neq \emptyset$.

(UV2) W ist abgeschlossen gegenüber der Addition, d.h.:

Sind $w_1, w_2 \in W$, so ist $w_1 + w_2 \in W$.

(UV3) W ist abgeschlossen gegenüber der skalaren Multiplikation, d.h.:

Sind $w \in W$ und $\alpha \in K$, so ist $\alpha \cdot w \in W$.

Bemerkung I.2.5. Ein Untervektorraum $W \subset V$ ist zusammen mit der induzierten Addition und skalaren Multiplikation selber ein K-Vektorraum.

Beispiel I.2.6. Sei K ein beliebiger Körper. Die Lösungsmenge jedes **homogenen** linearen Gleichungssystems über K mit m Gleichungen in n Unbekannten

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ist ein Unterraum von K^n.

Lemma I.2.7. Sei V ein Vektorraum und seien W_1, W_2 Unterräume von V. Dann gelten:

(a) $W_1 \cap W_2$ ist ein Unterraum von V.

(b) $W_1 \cup W_2$ ist kein Unterraum von V, ausser wenn $W_1 \subset W_2$ oder $W_2 \subset W_1$.

Definition I.2.8. Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben. Ein Vektor $v \in V$ der Form

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \text{ mit } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$$

heisst *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$.

Definition I.2.9. Sei V ein K-Vektorraum und sei $A \subset V$ eine Teilmenge von V. Wir setzen

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_K(A) &:= \{\text{alle } \textbf{endlichen} \text{ Linearkombinationen von Vektoren aus } A\} \\ &= \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists v_1, \ldots v_n \in A, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \text{ mit} \\ &\qquad\qquad v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n\}\cdot \end{aligned}$$

und $\operatorname{span}_K(\emptyset) := \{0_V\}\cdot$

Lemma I.2.10. Sei V ein K-Vektorraum und sei $A \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist die Menge $\operatorname{span}_K(A)$ ein Unterraum von V. Es ist sogar der kleinste Unterraum von V, der A enthält, denn gilt:
Ist $W \subset V$ ein Unterraum mit $A \subset W$, so ist $\operatorname{span}_K(A) \subset W$.

Lemma I.2.11 (Austauschlemma).
Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in einem K-Vektorraum V und sei $w \in V$, so dass w eine Linearkombination $w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ mit $\alpha_1 \neq 0$ ist. Dann gilt

$$\operatorname{span}(w, v_2, \ldots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n, w).$$