Lineare Algebra 1 – HS 2021
aktueller Vorlesungsstand

Pierre-Marie Poloni

2. November 2021

Vorsicht!

Dieses Dokument ist kein Vorlesungsskript und kann Vorlesungspräsenz und Vorlesungsmitschrift sicher nicht ersetzen.

Empfohlene Literatur

- *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger*, Gerd Fischer (Springer Verlag).
- *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Max Koecher (Springer-Lehrbuch).
- *Lineare Algebra*, Theo de Jong (Pearson Verlag).
- *Algebra*, Michael Artin (Birkhäuser Verlag).

Die Vorlesung basiert sich auf dem Lehrbuch von Fischer.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Vektorräume

I.0 Mengen, Abbildungen, Familien

Definition I.0.1. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (*Elemente* genannt) zu einem Ganzen.

Man schreibt „$x \in M$“, wenn x ein Element der Menge M ist.

Man schreibt „$x \notin M$“, wenn x kein Element von M ist.

Man bezeichnet mit $\emptyset$ die leere Menge.

Definition I.0.2. Seien A und B zwei Mengen.

Man sagt, dass A eine *Teilmenge* von B ist (in Zeichnen $A \subset B$), falls jedes Element von A auch ein Element von B ist.

Man sagt, dass A und B *gleich* sind (in Zeichnen $A = B$), wenn sie genau dieselben Elemente haben. Nach Definition gilt dann:

$$A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ und } B \subset A).$$

Definition I.0.3. Seien A und B zwei Mengen.

- Die *Vereinigung* von A und B ist $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$.
- Der *Durchschnitt* von A und B ist $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$.
- Die *Differenz* von A und B ist $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$.

Definition I.0.4. Das *kartesische Produkt* von endlich viele Mengen $A_1, \dots, A_n$ ist die Menge $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ aller geordneten n-Tupeln $(a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in A_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Sind A eine Menge und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, so setzen wir

$$A^n := \underbrace{A \times \dots \times A}_{n-\text{mal}}.$$

Definition I.0.5. Seien X und Y zwei Mengen. Eine *Abbildung* von X nach Y ist eine Vorschrift f, die zu jedem Element $x \in X$ **genau ein** Element $y \in Y$ zuordnet. Man schreibt dafür:

$$f\colon \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

Die Menge aller Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$.

Definition I.0.6. Jede Abbildung lässt sich in Form einer *Familie* darstellen. Die Familie $(x_i)_{i \in I}$ entspricht dann der Abbildung

$$f\colon \begin{array}{ccc} I & \to & X \\ i & \mapsto & x_i \end{array}$$

Wir bezeichnen mit X^I die Menge aller Familien mit Indexmenge I, deren Glieder in X liegen.

I.1 Gruppen, Körper

Definition I.1.1. Eine *Gruppe* ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, für die folgende Regeln gelten:

(G1) $*$ ist assoziativ, d.h.: Für alle $a, b, c \in G$ gilt

$$(a * b) * c = a * (b * c) =: a * b * c.$$

(G2) Es gibt ein Element $e_G \in G$, *neutrales Element* genannt, für das gilt:

$$e_G * a = a * e_G = a \quad \text{für alle } a \in G.$$

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a_{\mathrm{inv}} \in G$, *inverses Element* zu a genannt, für das gilt:

$$a_{\mathrm{inv}} * a = a * a_{\mathrm{inv}} = e_G.$$

Die Gruppe heisst *kommutativ* oder *abelsch*, falls $a*b = b*a$ für alle $a, b \in G$.

Bemerkung I.1.2. Für jede Gruppe $(G, *)$ gelten folgende Aussagen:

(1) Das neutrale Element e_G ist eindeutig bestimmt.

(2) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element.

(3) Ist $a * b = e_G$, so sind $a_{\mathrm{inv}} = b$ und $b_{\mathrm{inv}} = a$.

(4) Es gelten $(a_{\mathrm{inv}})_{\mathrm{inv}} = a$ und $(a * b)_{\mathrm{inv}} = b_{\mathrm{inv}} * a_{\mathrm{inv}}$ für alle $a, b \in G$.

(5) Die Gleichung $a * x = b$ ist für alle $a, b \in G$ eindeutig lösbar. Die Lösung ist $x = a_{\text{inv}} * b$.

Definition I.1.3. Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subset G$ heisst *Untergruppe* von G, wenn H zusammen mit $*$ selbst wieder eine Gruppe ist. D.h., wenn die drei folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $e_G \in H$
- Für alle $a, b \in H$ ist auch $a * b \in H$.
- Für alle $a \in H$ ist $a_{\text{inv}} \in H$.

Definition I.1.4. Ein *Körper* ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : G \times G \to G \quad \text{und} \quad \cdot : G \times G \to G,$$

für die folgende Regeln gelten:

(K1) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
(Wir bezeichnen mit 0_K das neutrale Element bzg. der $+$ und mit $-a$ das Inverse zu $a \in K$. Weiter schreiben wir „$a - b$" für „$a + (-b)$".)

(K2) $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe.
(Wir bezeichnen mit 1_K das neutrale Element bzg. der $\cdot$ und mit a^{-1} das multiplikative Inverse zu $a \in K \setminus \{0_K\}$.)

(K3) Für alle $a, b, c \in K$ gelten die Distributivgesetze

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

Bemerkung I.1.5. Für jeden Körper K gelten folgende Aussagen:

(1) $1_K \neq 0_K$. Also hat jeder Körper mindestens zwei Elemente.

(2) $0_K \cdot a = a \cdot 0_K = 0_K$ für alle $a \in K$.

(3) Aus $a \cdot b = 0_K$ folgt $a = 0_K$ oder $b = 0_K$.

(4) $(-1_K) \cdot a = -a$ für alle $a \in K$. Somit $a \cdot (-b) = -a \cdot b$ und $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für alle $a, b \in K$.

(5) Aus $a \cdot b = a \cdot c$ mit $a \neq 0_K$ folgt $b = c$.

Lemma I.1.6. Sei K ein endlicher Körper. Dann gibt es eine ganze Zahl $n \geq 2$, so dass

$$\underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n\text{-mal}} = 0_K.$$

Das kleinste solche $n \geq 2$ ist eine Primzahl, *Charakteristik* von K genannt.

Definition I.1.7. Sei $(L, +, \cdot)$ ein Körper. Eine Teilmenge $K \subset L$ heisst *Unterkörper* von L, wenn sie zusammen mit den auf K eingeschränkten Verknüpfungen selbst wieder ein Körper ist. D.h., wenn K folgende Eigenschaften hat:

- $0_L, 1_L \in K$.
- Für alle $a, b \in K$ sind auch $a + b \in K$ und $a \cdot b \in K$.
- Für alle $a \in K \setminus \{0_L\}$ sind $-a \in K$ und $a^{-1} \in K$.

I.2 Vektorräume, Unterverktorräume, Erzeugendensysteme

Definition I.2.1. Sei K ein Körper. Ein *Vektorraum* über K (man sagt auch K-Vektorraum) ist eine Menge V mit einer inneren Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w \qquad \text{(Addition genannt)}$$

und einer äusseren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \qquad \text{(skalare Multiplikation genannt)}$$

für die folgende Regeln erfüllt sind:

(V1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

(V2) Für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gelten

(a) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$.

(b) $1_K \cdot v = v$.

(c) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.

(d) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Bemerkung I.2.2. Ist V ein K-Vektorraum, so gelten folgende Aussagen:

(1) $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$.

(2) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$ für alle $\alpha \in K$.

(3) $\alpha \cdot v = 0_V \Leftrightarrow (\alpha = 0_K$ oder $v = 0_V)$.

(4) $(-1_K) \cdot v = -v$ für alle $v \in V$.

Beispiel I.2.3. Sei K ein beliebiger Körper.

(1) Die Menge $\{0\}$ ist ein K-Vektorraum, *Nullvektorraum* genannt, wobei die Addition und skalare Multiplikation durch $0 + 0 = 0$ und $\alpha \cdot 0 = 0$ für alle $\alpha \in K$ definiert sind.

(2) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist die Menge K^n ein K-Vektorraum, wobei die Addition und skalare Multiplikation komponentenweise definiert sind, d.h., durch die Formeln

$$(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

und

$$\alpha \cdot (v_1, \dots, v_n) = (\alpha \cdot v_1, \dots, \alpha \cdot v_n)$$

für alle $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in K^n$ und alle $\alpha \in K$.

(3) Seien X eine nicht leere Menge und V ein K-Vektorraum. Dann ist die Menge $\mathrm{Abb}(X, V)$ aller Abbildungen von X nach V ein K-Vektorraum, wobei die Addition und skalare Multiplikation punktweise definiert sind, d.h., durch die Formeln

$$f + g \colon x \mapsto f(x) + g(x) \text{ und } \alpha \cdot f \colon x \mapsto \alpha \cdot f(x)$$

für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(X, V)$ und alle $\alpha \in K$.

Definition I.2.4. Eine Teilmenge W eines K-Vektorraums V ist ein *Untervektorraum* von V, wenn gelten:

(UV1) $W \neq \emptyset$.

(UV2) W ist abgeschlossen gegenüber der Addition, d.h.:
Sind $w_1, w_2 \in W$, so ist $w_1 + w_2 \in W$.

(UV3) W ist abgeschlossen gegenüber der skalaren Multiplikation, d.h.:
Sind $w \in W$ und $\alpha \in K$, so ist $\alpha \cdot w \in W$.

Bemerkung I.2.5. Ein Untervektorraum $W \subset V$ ist zusammen mit der induzierten Addition und skalaren Multiplikation selber ein K-Vektorraum.

Beispiel I.2.6. Sei K ein beliebiger Körper. Die Lösungsmenge jedes **homogenen** linearen Gleichungssystems über K mit m Gleichungen in n Unbekannten

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ist ein Unterraum von K^n.

Lemma I.2.7. Sei V ein Vektorraum und seien W_1, W_2 Unterräume von V. Dann gelten:

(a) $W_1 \cap W_2$ ist ein Unterraum von V.

(b) $W_1 \cup W_2$ ist kein Unterraum von V, ausser wenn $W_1 \subset W_2$ oder $W_2 \subset W_1$.

Definition I.2.8. Sei V ein K-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ gegeben. Ein Vektor $v \in V$ der Form

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \text{ mit } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$$

heisst *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$.

Definition I.2.9. Sei V ein K-Vektorraum und sei $A \subset V$ eine Teilmenge von V. Wir setzen

$$\begin{aligned} \operatorname{span}_K(A) &:= \{\text{alle } \textbf{endlichen} \text{ Linearkombinationen von Vektoren aus } A\} \\ &= \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists v_1, \ldots v_n \in A, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \text{ mit} \\ &\qquad v = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n\}\cdot \end{aligned}$$

und $\operatorname{span}_K(\emptyset) := \{0_V\}\cdot$

Lemma I.2.10. Sei V ein K-Vektorraum und sei $A \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist die Menge $\operatorname{span}_K(A)$ ein Unterraum von V. Es ist sogar der kleinste Unterraum von V, der A enthält, denn gilt:
Ist $W \subset V$ ein Unterraum mit $A \subset W$, so ist $\operatorname{span}_K(A) \subset W$.

Lemma I.2.11 (Austauschlemma).
Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in einem K-Vektorraum V und sei $w \in V$, so dass w eine Linearkombination $w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$ mit $\alpha_1 \neq 0$ ist. Dann gilt

$$\operatorname{span}(w, v_2, \ldots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \operatorname{span}(v_1, v_2, \ldots, v_n, w).$$

I.3 Basen, Dimension

Definition I.3.1. Sei V ein K-Vektorraum.

- Eine endliche Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ von Vektoren aus V heisst *linear unabhängig* (über K), wenn gilt:

  Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ Skalare mit $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_r \cdot v_r = 0_V$, so folgt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0_K$.

- Statt „die Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ ist linear unabhängig“ darf man auch einfacher sagen „die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ sind linear unabhängig“.

- Die leere Familie ist linear unabhängig.

- Eine beliebige Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V heisst *linear unabhängig*, wenn jede **endliche** Teilfamilie linear unabhängig ist.

Lemma I.3.2. Äquivalent sind:

(1) Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig über K.

(2) Jeder Vektor $v \in \operatorname{span}_K(\{v_i \mid i \in I\})$ lässt sich in eindeutiger Weise als endliche Linearkombination der Vektoren der Familie darstellen.

Bemerkung I.3.3. In jedem K-Vektorraum V gelten:

(1) Ein einziger Vektor $v \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn $v = 0_V$.

(2) Gehört der Nullvektor zu einer Familie, so ist sie linear abhängig.

(3) Kommt der gleiche Vektor in einer Familie mehrmals vor, so ist sie linear abhängig.

(4) Eine Familie $(v_1, \ldots, v_r)$ von $r \geq 2$ Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn einer davon Linearkombination der anderen ist.

(5) Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn ein Vektor das Vielfache des anderen Vektors ist.

Behauptung I.3.4. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und definieren für jedes $a \in \mathbb{R}$ das Element $f_a \in V$ durch $f_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$. Dann ist die Familie $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ linear unabhängig.

Definition I.3.5. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in einem K-Vektorraum V heisst *Basis* von V, wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:

(a) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein Erzeugendensystem von V, d.h., $\mathrm{span}_K(\{v_i \mid i \in I\}) = V$.

(b) $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.

Definition I.3.6. Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Für jedes $i = 1, \dots, n$ bezeichnen wir mit $e_i = (0_K, \dots, 0_K, 1_K, 0_K, \dots, 0_K)$ den Vektor aus K^n, deren Koordinaten alle Null sind, ausser die i-te, die gleich 1_K ist. Dann ist $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis von K^n, *Standardbasis* oder *kanonische Basis* genannt.

Lemma I.3.7. Ein endliches Erzeugendensystem $(v_1, \dots, v_n)$ eines Vektorraums V ist genau dann eine Basis von V, wenn es unverkürzbar ist. D.h., wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Familie $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ kein Erzeugendensystem mehr ist.

Korollar I.3.8. Jeder endlicherzeugte Vektorraum besitzt eine (endliche) Basis.

Korollar I.3.9 (Basisauswahlsatz). Man kann aus jedem endlichen Erzeugendensystem eine Basis auswählen.

Satz I.3.10. Sei V ein endlicherzeugter Vektorraum und seien $L = (\ell_1, \dots, \ell_r)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren aus V, $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $S = (v_1, \dots, v_s)$ ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann gilt $r \leq n \leq s$.

Korollar I.3.11. Sei V ein endlicherzeugter K-Vektorraum. Dann gelten:

- Jede linear unabhängige Familie in V ist endlich.
- Jede Basis von V ist endlich und je zwei Basen haben gleich viele Elemente.
  Definition: Diese Anzahl nennt man *Dimension* von V über K. Wir bezeichnen sie mit $\dim_K(V)$. Ist V nicht endlich erzeugt, so nennt man V unendlichdimensional.

Korollar I.3.12. Ist $\dim(V) = n$ endlich, so ist jede Familie von $n+1$ Vektoren von V linear abhängig.

Satz I.3.13 (Basisergänzungssatz). Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = n < +\infty$ und seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig. Dann gilt:

(1) Es gibt Vektoren $w_{r+1}, \ldots, w_n \in V$, so dass $(v_1, \ldots, v_r, w_{r+1}, \ldots, w_n)$ eine Basis von V ist.

(2) Ist $(w_i)_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem von V gegeben, so kann man sogar $i_1, \ldots, i_{n-r} \in I$ finden, so dass $(v_1, \ldots, v_r, w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n-r}})$ eine Basis von V ist.

Korollar I.3.14. Sei V ein Vektorraum von Dimension $n < +\infty$. Für je n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.

(2) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem von V.

(3) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

Lemma I.3.15. Ist W ein Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V, so ist W auch endlichdimensional. Weiter gilt $\dim(W) \leq \dim(V)$, mit Gleichheit genau dann, wenn $W = V$ ist.

I.4 Summen von Untervektorräumen

Definition I.4.1. Seien $W_1, \ldots, W_r$ endlich viele Unterräume von einem K-Vektorraum V. Ihre *Summe* ist der Unterraum von V, der durch

$$W_1 + \cdots + W_r := \{w_1 + \cdots + w_r \mid w_i \in W_i\} = \operatorname{span}_K(W_1 \cup \cdots \cup W_r)$$

definiert ist.

Bemerkung I.4.2. Es gilt $\dim(W_1 + \cdots + W_r) \leq \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_r)$.

Satz I.4.3 (Dimensionsformel).
Sind $W_1, W_2 \subset V$ endlichdimensionale Unterräume, so gilt:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Definition I.4.4. Seien $W_1, \ldots, W_r$ Unterräume von einem K-Vektorraum V. Die Summe $W_1 + \cdots + W_r$ nennen wir *direkt*, wenn jeder Vektor v von $W_1 + \cdots + W_r$ eindeutig darstellbar als $v = w_1 + \cdots + w_r$ mit $w_i \in W_i$, $1 \leq i \leq r$, ist. Wir bezeichnen eine direkte Summe mit $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Lemma I.4.5. Für Unterräume $W_1, \dots, W_r$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Die Summe $W_1 + \dots + W_r$ ist direkt.

(2) Ist für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ eine Basis $(w_1^{(i)}, \dots, w_{d_i}^{(i)})$ von W_i gegeben, so ist $(w_1^{(1)}, \dots, w_{d_1}^{(1)}, \dots, w_1^{(r)}, \dots, w_{d_r}^{(r)})$ eine Basis von $W_1 + \dots + W_r$.

(3) $\dim(W_1 + \dots + W_r) = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_r)$.

Behauptung I.4.6. Eine Summe $W_1 + W_2$ von zwei Unterräumen ist genau dann direkt, wenn $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist.

I.5 Das Eliminationsverfahren von Gauss

Definition I.5.1. Wir betrachten ein *lineares Gleichungssystem* über einem Körper K mit m Gleichungen in den n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dieses System schreiben wir auch als

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ Spaltenvektoren sind und wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$$

eine $m \times n$-Matrix ist. Die Matrix A nennen wir *Koeffizientenmatrix* des linearen Systems. Die $m \times (n+1)$-Matrix

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

heisst *erweiterte Koeffizientenmatrix* des Systems.

Definition I.5.2. Eine $m \times n$-Matrix ist in *Zeilenstufenform*, wenn sie die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}.$$

Dabei sind:

- $r \in \{0, 1 \ldots, m\}$ ist die Anzahl der Nichtnullzeilen.
- Die Einträge $a_{1j_1}, \ldots, a_{r,j_r}$ sind nicht Null, *Pivots* genannt.
- $*$ steht für ein beliebiges Element von K.
- In jeder Nichtnullzeile stehen links vor dem Pivotelement nur Nullen.
- Unterhalb von einem Pivotelement stehen nur Nullen.
- Die letzten $m - r$ Zeilen sind Nullzeilen.

Definition I.5.3. Auf den Zeilen einer Matrix benutzen wir drei Arten von *elementaren Zeilenoperationen.*

Typ 1. Vertauschung von zwei Zeilen.

Typ 2. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\alpha \neq 0$.

Typ 3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Satz I.5.4.

(a) Sei (A, b) die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems und sei $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ aus (A, b) durch endlich viele elementare Zeilenoperationen entstanden. Dann haben die Systeme $Ax = b$ und $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ dieselben Lösungen.

(b) Mit Hilfe des Gauss-Verfahren kann man jede Matrix durch elementare Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform bringen.

Kapitel II

Lineare Abbildungen und Matrizen

II.0 Der Vektorraum der $m \times n$-Matrizen

Definition II.0.1. Für alle $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ in $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und alle $\alpha \in K$ setzen wir

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m\times n, K) \text{ und } \alpha\cdot A := (\alpha\cdot a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m\times n, K).$$

Wir bezeichnen mit E_{ij} die Matrix von $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$, die ein $1 = 1_K$ an der Stelle (i, j) hat und deren anderen Einträgen alle Null sind.

Behauptung II.0.2. Zusammen mit der obigen Addition und skalaren Multiplikation ist $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ein K-Vektorraum von Dimension $m \cdot n$. Die Elementarmatrizen E_{ij} mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$, *Standardbasis* genannt.

Notation II.0.3. Den Vektorraum $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus dem Körper K bezeichnen wir auch mit $K^{m\times n}$. Dann bezeichnen $K^{1\times n}$ und $K^{n\times 1}$ den Vektorraum aller Zeilenvektoren bzw. aller Spaltenvektoren der Länge n.

II.1 Der Vektorraum der linearen Abbildungen

Definition II.1.1. Seien V und W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ nennen wir *linear* über K, falls sie mit der Addition und skalaren Multiplikation verträglich ist, d.h., falls gelten:

(L1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(L2) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in K$.

Definition II.1.2.

- Eine lineare Abbildung nennt man auch *Homomorphismus* zwischen Vektorräumen. Man bezeichnet mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge aller K-linearen Abbildungen von V nach W.
- Ein bijektiver Homomorphismus nennt man *Isomorphsmus*.
- Ein Homomorphismus von V nach V nennt man *Endomorphismus*.

Behauptung II.1.3. Die Menge $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ aller linearen Abbildungen zwischen K-Vektorräumen V und W ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.

Lemma II.1.4. Seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper K.

(1) Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, so gilt $f(0_V) = 0_W$.

(2) Ist $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, so gilt

$$f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n)$$

für alle Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und alle Skalaren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

(3) Jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist durch die Bilder der Vektoren einer Basis von V eindeutig bestimmt.

(4) Sei V endlich dimensional und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Seien $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren aus W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Beispiel II.1.5. Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{cccccc} f_A: & K^{n\times 1} & \to & K^{m\times 1} & & \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

linear.

II.2 Koordinaten, Darstellungsmatrix

Definition II.2.1. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Sei $v \in V$. Die (eindeutig bestimmten) Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ nennen wir *Koordinaten* des Vektors v bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Den Spaltenvektor $[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$ nennen wir *Koordinatenvektor* von v bezüglich $\mathcal{B}$.

Bemerkung II.2.2. Für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha \in K$ gelten

$$[v + w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad [\alpha v]_{\mathcal{B}} = \alpha \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

Satz II.2.3. Gegeben seien K-Vektorräume V mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und W mit Basis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ genau eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, so dass

$$f(v_j) = a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$

Wir bezeichnen diese Matrix mit $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ und nennen sie *Darstellungsmatrix* von f bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Sie ist die einzige $m \times n$-Matrix die folgendes erfüllt:

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot [v]_{\mathcal{A}} \qquad \text{für alle } v \in V.$$

Bemerkung II.2.4.

In den Spalten von $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ stehen die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{A}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Bemerkung II.2.5. Für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und alle $\alpha \in K$ gelten

$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f + g) = \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) + \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(g) \quad \text{und} \quad \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\alpha f) = \alpha \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f).$$

II.3 Kern und Bild einer linearen Abbildung

Definition II.3.1. Das *Bild* und der *Kern* eines Homomorphismus f in $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ sind definiert durch

$$\mathrm{Im}(f) := f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$$

und

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subset V.$$

Lemma II.3.2. Für jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ gelten:

(1) $\mathrm{Im}(f)$ ist ein Untervektorraum von W mit $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(V)$.

(2) Ist $V' \subset V$ ein Unterraum, so ist $f(V') := \{f(v) \mid v \in V'\}$ ein Unterraum von W von Dimension $\leq \dim(V')$.

(3) $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Unterraum von V.

(4) Ist $W' \subset W$ ein Unterraum, so ist $f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$ ein Unterraum von V.

Definition II.3.3. Der *Rang* einer linearen Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ ist die Dimension ihres Bildes:

$$\mathrm{rg}(f) := \dim_K \mathrm{Im}(f).$$

Satz II.3.4. (Rangsatz)
Für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $\dim(V)$ endlich gilt

$$\dim_K V = \dim_K \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f).$$

Satz II.3.5. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen V und W von Dimension $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ ist genau dann vom Rang r, wenn es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W gibt, so dass

$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)_{(r+(m-r))\times(r+(n-r))}$$

Definition II.3.6. Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix. Wir definieren $\mathrm{Ker}(A) := \mathrm{Ker}(f_A)$, $\mathrm{Im}(A) := \mathrm{Im}(f_A)$ und $\mathrm{rg}(A) := \dim_K(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{rg}(f_A)$, wobei f_A die Abbildung $f_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$, $x \mapsto A \cdot x$, bezeichnet.

Bemerkung II.3.7. Für jedes $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gelten:

(1) $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in K^{n\times 1} \text{ mit } A \cdot x = 0\}$.

(2) $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}_K\{\text{Spalten von } A\} \subset \mathbb{K}^{m\times 1}$.

(3) $n = \dim \mathrm{Ker}(A) + \mathrm{rg}(A)$.

Bemerkung II.3.8. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $\dim_K W$ endlich. Dann gilt:

$$f \text{ surjektiv } \iff \mathrm{rg}(f) = \dim_K W.$$

Lemma II.3.9. Für jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt

$$f \text{ injektiv } \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}.$$

Korollar II.3.10. Für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen mit $\dim_K V = \dim_K W$ gilt:

$$f \text{ injektiv } \iff f \text{ surjektiv } \iff f \text{ bijektiv}.$$

Definition II.3.11. Zwei K-Vektorräume heissen *isomorph* zueinander, wenn es einen bijektiven K-Homomorphismus (*Isomorphismus* genannt) $f : V \to W$ gibt.

Behauptung II.3.12. Ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ bijektiv, so ist ihre Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear.

Satz II.3.13. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Dann gilt: f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $f(\mathcal{B}) := (f(v_i))_{i\in I}$ eine Basis von W ist.
Insbesondere haben isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension.

Korollar II.3.14. Zwei endlichdimensionale Vektorräume V und W über demselben Körper K sind genau dann isomorph, wenn $\dim_K(V) = \dim_K(W)$.

II.4 Affine Unterräume

Definition II.4.1. Eine Teilmenge X eines K-Vektorraums V heisst *affiner Unterraum*, wenn es einen Vektor $v \in V$ und einen Untervektorraum $W \subset V$ gibt, so dass $X = v + W := \{v + w \mid w \in W\}$ ist.

Lemma II.4.2.

(1) Ist $X = v + W \subset V$ ein affiner Unterraum, so gilt $X = v' + W$ für alle $v' \in X$.

(2) Sind $X = v + W$ und $X' = v' + W'$ affine Unterräume von V, so gelten:

  (a) $X \subset X' \Longleftrightarrow (v \in X'$ und $W \subset W')$.

  (b) $X = X' \Longleftrightarrow (W = W'$ und $v - v' \in W)$.

  (c) Ist $X \cap X' \neq \emptyset$, so ist $X \cap X'$ ein affiner Unterraum von V und es gilt $X \cap X' = x + (W \cap W')$ für alle $x \in X \cap X'$.

Definition II.4.3. Die Dimension eines affinen Unterraums $X = v + W$ ist definiert durch $\dim(X) := \dim_K(W)$.

- Ein affiner Unterraum von Dimension 1 heisst *affine Gerade*.
- Ein affiner Unterraum von Dimension 2 heisst *affine Ebene*.
- Ist $\dim(V) = n$ endlich, so nennen wir *affine Hyperebene* jeden affinen Unterraum von V, der Dimension $n - 1$ hat.