Übungsblatt 9

Abgabe: Am Montag den 29. November 2021 in der Vorlesung oder bis 12.15 Uhr im Fächlein beim Eingang Spiegelgasse 1.

$\boxed{\text{S}}$ **Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass die Zahlen n^2+n und $2n+1$ für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ teilerfremd sind.

$\boxed{\text{S}}$ **Aufgabe 2.** Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen mit Rest in $\mathbb{R}[t]$ durch.

(a) $(3t^5 + 4t^2 + 1) : (t^2 + 2t + 3)$.

(b) $(t^3 - 2t^2 + 3t - 2) : (t - 1)$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass das Polynom $x^4 + ax^3 + bx + c$ in $\mathbb{R}[x]$ durch $x^2 + x + 1$ teilbar ist.

$\boxed{\text{E}}$ **Aufgabe 4.** Sei K ein Körper und seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$a \text{ teilt } b \text{ in } \mathbb{Z} \iff t^a - 1 \text{ teilt } t^b - 1 \text{ in } K[t].$$

Aufgabe 5.

(a) Seien $A, B, C \in K[t]$. Zeigen Sie die folgende Behauptung:
Teilt A das Produkt BC und ist teilerfremd zu B, so teilt es C.

(b) Wir sagen, dass Polynome $P_1, \ldots, P_n \in K[t]$ *paarweise teilerfremd* sind, wenn P_i und P_j für alle $i \neq j$ teilerfremd sind. Zeigen Sie nach Induktion über $n \geq 2$, dass P_1 und $Q := P_2 \cdots P_n$ teilerfremd sind, wenn die P_i paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass zwei Polynome $P, Q \in K[t]$ genau dann teilerfremd sind, wenn die Polynome $P + Q$ und PQ teilerfremd sind.