# Übungsblatt 4

**Abgabe:** Am Montag den 25. Oktober 2021 in der Vorlesung oder bis 12.15 Uhr im Fächlein beim Eingang Spiegelgasse 1.

**Aufgabe 1.** Wir betrachten den Unterraum $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2\}$ von $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $W$.

(b) Finden Sie einen Unterraum $U$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $\mathbb{R}^3 = W \oplus U$ gilt.

**Aufgabe 2.** Sei $W \subset V$ ein Unterraum eines endlichdimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie, dass es einen Unterraum $U \subset V$ gibt, so dass $V = W \oplus U$ gilt.

S **Aufgabe 3.** Entscheiden Sie, ob die folgende Behauptung richtig oder falsch ist.
Sind $W_1, W_2, W_3$ Unterräume von einem Vektorraum $V$, so gilt

$$W_1 \cap (W_2 + W_3) = W_1 \cap W_2 + W_1 \cap W_3.$$

S **Aufgabe 4.** Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (0, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, -1)$, $v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ und $v_5 = (0, 0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^4$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind.

(a) $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) = 2$.

(b) $\operatorname{span}(v_1, v_2) + \operatorname{span}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$.

(c) $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3) \oplus \operatorname{span}(v_4, v_5) = \mathbb{R}^4$.

**Aufgabe 5.** Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Seien

$$\mathcal{G} := \{\text{gerade Funktionen}\} = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$\mathcal{U} := \{\text{ungerade Funktionen}\} = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$ Unterräume von $V$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $V = \mathcal{G} \oplus \mathcal{U}$ gilt.

*Hinweis.* Für jedes $f \in V$ ist die Funktion $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ eine gerade Funktion.

E **Aufgabe 6.** Sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und seien $W_1$ und $W_2$ zwei Unterräume von $V$ von derselben Dimension. Seien $n = \dim_K V$ und $d = \dim_K W_1 = \dim_K W_2$.

(a) Wir betrachten zunächst den Fall $d = n - 1$. Zeigen Sie, dass es einen Unterraum $U \subset V$ gibt, so dass $W_1 \oplus U = W_2 \oplus U = V$ gilt.

(b) Sei nun $d$ beliebig. Zeigen Sie durch Induktion nach $c := n - d$, $0 \leq c \leq n$, dass es einen Unterraum $U \subset V$ gibt, so dass $W_1 \oplus U = W_2 \oplus U = V$ gilt.