

Übungsblatt 2

Abgabe: Am Montag den 11. Oktober 2021 in der Vorlesung oder bis 12.15 Uhr im Fächlein beim Eingang Spiegelgasse 1.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$ -Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$?

- (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 1\}$.
- (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0 \text{ und } 2y = z\}$.
- (c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y^2 - z = 0\}$.
- (d) $W_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y = 0\}$.

S Aufgabe 2. Wir betrachten den reellen Vektorraum $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zusammen mit den üblichen Verknüpfungen. Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$ -Unterräume von V ?

- (a) $W_1 = \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$.
- (b) $W_2 = \{f \in V \mid f \text{ hat (mindestens) einen Fixpunkt}\}$.
- (c) $W_3 = \{f \in V \mid f \text{ ist beschränkt}\}$.
- (d) $U_\lambda = \{f \in V \mid f(0) = \lambda\}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben ist.

S Aufgabe 3.

- (a) Wir betrachten die drei Vektoren $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (-1, 1, 3)$ und $w = (4, -1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$. Ist $w \in \text{span}(v_1, v_2)$?
- (b) Ist die Menge $\{(2a - b, a + b, 3b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 4. Seien $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, -1, 3)$, $w_1 = (3, 0, 4)$ und $w_2 = (0, 3, -1)$ in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(w_1, w_2)$ ist.

E Aufgabe 5. Sei $n \geq 2$. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnen wir mit v_i den Vektor in $\mathbb{R}^n$, der durch $v_i = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$ definiert ist, wobei die 0 an der Stelle i steht. Zeigen Sie:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 6. Sei V ein Vektorraum und seien W_1, W_2 Unterräume von V .

- (a) Beweisen Sie, dass $W_1 \cap W_2$ ein Unterraum von V ist.
- (b) Beweisen Sie, dass $W_1 \cup W_2$ kein Unterraum von V ist, ausser wenn $W_1 \subset W_2$ oder $W_2 \subset W_1$.