Übungsblatt 12

Diese Serie zählt nicht für das Testat. Sie können sie aber freiwillig abgeben, falls Ihnen noch ein paar Punkte fehlen, um die 75% zu erreichen.

Freiwillige Abgabe: Montag den 17. Januar 2022 per Email an pierre-marie.poloni@unibas.ch

S **Aufgabe 1.** Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(A^\top)$ für alle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gilt.

S **Aufgabe 2.** Man bestimme das charakteristische Polynom der folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -10 & -1 & 12 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Sind sie diagonalisierbar (über $\mathbb{R}$)?

S **Aufgabe 3.**

(a) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit P_j das Polynom in $\mathbb{R}[x]$, das durch $P_j(x) = (x + j)^3$ definiert ist. Zeigen Sie, dass die Familie $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ in $\mathbb{R}[x]$ linear abhängig ist.

(b) Folgern Sie daraus, dass $\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \end{vmatrix} = 0$ ist.

S **Aufgabe 4.**

(a) Gibt es eine reelle Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

(b) Gibt es eine reelle Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

E **Aufgabe 5.** Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass zwei reelle Matrizen genau dann über $\mathbb{R}$ ähnlich sind, wenn sie über $\mathbb{C}$ ähnlich sind.

(a) Sei $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine invertierbare komplexe Matrix. Wir schreiben $T = T_1 + \mathbf{i}T_2$ mit $T_1, T_2 \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Matrix $T_1 + cT_2$ invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass zwei reelle Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ genau dann ähnlich sind, wenn sie über $\mathbb{C}$ ähnlich sind.

E **Aufgabe 6.**

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix von Rang 1. Zeigen Sie, dass es Spaltenvektoren $x \in K^{m\times 1}$ und $y \in K^{n\times 1}$ gibt, so dass $A = x \cdot y^\top$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass eine quadratische Matrix von Rang 1 genau dann diagonalisierbar ist, wenn ihre Spur ungleich Null ist.

Hinweis: $\mathrm{Spur}\left(x \cdot y^\top\right) = y^\top \cdot x$ und $\left(x \cdot y^\top\right)^2 = x \cdot y^\top \cdot x \cdot y^\top = y^\top \cdot x \cdot \left(x \cdot y^\top\right)$.