Übungsblatt 1

Abgabe: Am 5. Oktober 2021 in der Vorlesung oder bis 12.15 Uhr im Fächlein beim Eingang Spiegelgasse 1.

Aufgabe 1. Sei $(G, *)$ eine Gruppe und sei $a \in G$ beliebig. Wir definieren den *Zentralisator* von a durch $Z_G(a) := \{g \in G \mid g * a = a * g\}$. Zeigen Sie, dass $Z_G(a)$ eine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2. Sei $(G, *)$ eine Gruppe mit $a * a = e_G$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie, dass G kommutativ ist.

$\boxed{\text{S}}$ **Aufgabe 3.** Man sagt, dass eine Abbildung $f \colon X \to X$ eine *Bijektion* von X ist, falls es zu jedem Element $b \in X$ **genau** ein Element $a \in X$ mit $f(a) = b$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge aller Bijektionen von X mit der üblichen Komposition von Abbildungen eine Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass diese Gruppe nicht kommutativ ist, wenn die Menge X mindestens drei Elemente enthält.

$\boxed{\text{S}}$ **Aufgabe 4.** Zeigen Sie, dass die Menge $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ keinen Unterkörper besitzt, ausser $\mathbb{Q}$ selbst.

$\boxed{\text{E}}$ **Aufgabe 6.** Sei G eine Menge zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $* \colon G \times G \to G$, für die gilt:

(**G2′**) Es gibt ein Element $e \in G$ mit $e * a = a$ für alle $a \in G$.

(**G3′**) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element $a' \in G$ mit $a' * a = e$.

Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist.