Übungen - Blatt 3

→ 11.03.2011

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen und $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ eine quasi-projektive Varietät. Wir betrachten die folgende Definition:

Sei $x \in X$. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbf{k}$ heisst regulär in x, *wenn eine offene Menge $U \subset X$ und Polynome $P, Q \in \mathbf{k}[x_0, \dots, x_n]$ existieren, so dass $x \in U$, Q ist nie null auf U und $f = P/Q$ auf U.*
Eine Funktion $f\colon X \to \mathbf{k}$ heisst reguläre auf X *wenn f regulär in x ist, für jede $x \in X$.*

Zeigen Sie, dass jede solche Funktion stetig ist.

Aufgabe 2

Finden Sie die Punkte $x \in X$, wo die rationale Funktion $f \in \mathbf{k}(X)$ regulär ist.

1. $X = \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, $f = x_1/x_0$
2. $X = \{(w : x : y : z) \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid wx = yz\}$, $f = x/y$
3. $X = \{(w : x : y : z) \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid wx = yz\}$, $f = w/x$
4. $X = \{(w : x : y : z) \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$, $f = (w - x)/(y - z)$
5. $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $f = ((x_1)^2 + (x_2)^2)/((x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2)$
6. $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $f = ((x_1)^2 + (x_2)^2)/((x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2)$

Aufgabe 3

Seien X, Y, Z die folgenden projektiven algebraischen Varietäten:

$$\begin{aligned} X &= \left\{(w : x : y : z) \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid x^2 + y^2 = wz\right\}, \\ Y &= \left\{(w : x : y : z) \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid xy = z^2\right\}, \\ Z &= \left\{(w : x : y : z) \in \mathbb{P}^3_{\mathbf{k}} \mid x = 0\right\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{k}(X), \mathbf{k}(Y)$ und $\mathbf{k}(Z)$ isomorph sind.