Übungen - Blatt 2

→ 03.03.2011

Aufgabe 1

Sei $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ ein homogenes Polynom vom Grad 2. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. $V(f) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ist irreduzibel.
2. für alle $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, gilt $\left(\frac{\partial f}{x_0}(a_0, a_1, a_0), \frac{\partial f}{x_1}(a_0, a_1, a_0), \frac{\partial f}{x_2}(a_0, a_1, a_0)\right) \neq (0,0,0)$.

NB: Man sagt, dass $V(f)$ glatt ist *genau dann wenn 2. gilt.*
Tipp: Benützen Sie einen Koordinatenwechsel, so dass ein Punkt $(a_0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$, wobei $\left(\frac{\partial f}{x_0}(a_0, a_1, a_0), \frac{\partial f}{x_1}(a_0, a_1, a_0), \frac{\partial f}{x_2}(a_0, a_1, a_0)\right) = (0,0,0)$ erfüllt, in den neuen Koordinaten $(1 : 0 : 0)$ ist.

Aufgabe 2

Seien $f_1, \dots, f_k \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ Polynome, so dass $I = (f_1, \dots, f_n) \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ ein Primideal ist. Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ die affine algebraische Varietät

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \mid f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, k\}.$$

Wir sehen X in $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ via

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Menge $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ist eine quasi-projektive Varietät.
2. Die Menge $\mathcal{O}(X)$ von reguläre Funktionen ist isomorph zu
$$\mathbf{k}[X] = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n).$$
3. Der Körper $\mathbf{k}(X)$ ist isomorph zum Quotientenkörper des Koordinatenringes $\mathbf{k}[X]$.

Aufgabe 3

Seien X, Y, Z die folgenden projektiven algebraischen Varietäten:

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}} \mid x = 0\right\}, \\ Y &= \left\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}} \mid xy = z^2\right\}, \\ Z &= \left\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}} \mid xyz = x^3 + y^3\right\}. \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathbf{k}(X), \mathbf{k}(Y), \mathbf{k}(Z)$ isomorph sind.
2. Sei $U = \{(x : y : 1) \in \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}} \mid (x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}\} \cong \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$. Vergleichen Sie $\mathcal{O}(X \cap U), \mathcal{O}(Y \cap U)$ und $\mathcal{O}(Z \cap U)$. Sind diese Ringen isomorph?