Übungen - Blatt 1

→ 24.02.2011

Aufgabe 1 - (*Zariski-Topologie*)

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Es gibt eine Topologie auf $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$, deren abgeschlossenen Mengen gerade die affinen algebraischen Mengen sind.

2. Es gibt eine Topologie auf $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, deren abgeschlossenen Mengen gerade die projektiven algebraischen Mengen sind.

3. Die Abbildung $\phi_0\colon \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, $(x_1,\dots,x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$ ist injektiv. Die (Zariski)-Topologie auf $\mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ und die induzierte Topologie sind gleich.

Aufgabe 2

Sei $f \in \mathbf{k}[x_0,\dots,x_n]$ ein homogenes Polynom. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

1. $V(f) = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \mid f(x_0,\dots,x_n) = 0\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$ ist irreduzibel.

2. Es existiert ein irreduzibles homogenes Polynom $g \in \mathbf{k}[x_0,\dots,x_n]$ und ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $f = g^n$.

Aufgabe 3

Seien X, Y, Z die folgenden affinen algebraischen Varietäten:

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x,y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \;\middle|\; x^2 = y^3\right\}, \\ Y &= \left\{(x,y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \;\middle|\; y = x^3\right\}, \\ Z &= \left\{(x,y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \;\middle|\; x^2 y = 1\right\}. \end{aligned}$$

1. Berechnen Sie den Abschluss $\overline{\phi_0(X)}, \overline{\phi_0(Y)}$ und $\overline{\phi_0(Z)}$ von $\phi_0(X), \phi_0(Y), \phi_0(Z)$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$, wobei $\phi_0\colon \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ durch $\phi_0((x,y)) = (1 : x : y)$ definiert ist.

2. Vergleichen Sie $\overline{\phi_0(X)}, \overline{\phi_0(Y)}$ und $\overline{\phi_0(Z)}$. Was haben diese Mengen gemeinsam?

3. Zeichnen Sie die Mengen $X, Y, Z \subset \mathbb{A}^2_{\mathbf{k}}$ wenn $\mathbf{k} = \mathbb{R}$.