Universität Basel Mathematik

Probeklausur

Keine Abgabe Ist eine Vorbereitung.

Standardprogramm

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist.
Ist A ein Integritätsbereich? Ist A ein Körper?

Aufgabe 2

Sind die folgenden Mengen Unterräume von $\mathbb{R}^2$?
$\{(x,y) \mid x+y = 1 \in \mathbb{R}\}$, $\{(x,y) \mid x+y = 0 \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3

Sei $V = (\mathbb{F}_3)^2$ und seien $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,2)$. Finden Sie ein Element $v_3 \in V$, so dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis ist.

Aufgabe 4

Seien $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (1,2,5,6)$, $v_3 = (-1,-2,3,7)$, $v_4 = (1,2,5,7) \in \mathbb{R}^4$.
Finden Sie eine Basis von $\operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Ergänzungsprogramm

Aufgabe 1

Sei $R = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Gruppe R^* aller invertirbaren Elementen von R. Ist $(R^*, \cdot)$ zyklisch?

Aufgabe 2

Seien $f\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ die Abbildung, die durch

$$f(a_0 + \cdots + a_n t^n) = 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 4a_4 t^4 + \cdots + n a_n t^n$$

definiert ist.
Ist diese Abbildung $\mathbb{R}$-linear? Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

Aufgabe 3

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Beweisen Sie, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Sei $V = \{A \in M(2 \times 2; \mathbb{C}) \mid A + {}^t(A) = 0\}$.
Beweisen Sie, dass V ein $\mathbb{C}$-Unterraum von $M(2 \times 2; \mathbb{C})$ ist, und berechnen Sie eine Basis von V.