Übungen - Blatt 9

Abgabe: *26. November 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
28. November bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und $f\colon K^5 \to K^3$ die Abbildung

$$f\colon (x_1,\ldots,x_5) \to (x_1+3x_3+x_4, x_2+x_3, x_5-x_2-x_1).$$

Was ist die Matrix von K bezüglich der Kanonischen Basen?

Aufgabe 2

Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung, die $(x_1,\ldots,x_4)$ auf $(3x_1+2x_2-x_3, x_1+x_3, x_1+x_2-x_3)$ schickt.
Finden Sie eine Basis der $\mathbb{R}$-Vektorräumen $f(\mathbb{R}^4)$ und $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$.
Ist f surjektiv oder injektiv?

Aufgabe 3

Bestimme alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Gerade $y = x$ in die Gerade $y = 5x$ abbilden.

Aufgabe 4

Sei V, W zwei K-Vektorraüme, $f\colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung und $V_1, V_2 \subset V$ Unterräume. Welche von den folgenden Aussagen sind äquivalent? Welche impliziert welche?
1) $V = V_1 \oplus V_2$ 2) $f(V_1) \oplus f(V_2) = W$
3) $V = V_1 + V_2$ 4) $f(V_1) + f(V_2) = W$

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass ein K-Vektorraum V isomorph zu K^n ist, genau wenn $\dim(V) = n$.

Aufgabe 6

Sei V der Vektorraum alle Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.
Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f\colon & V & \to & V \\ & P(t) & \mapsto & P'(t) \end{array}$$

Wenn $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ ist die Ableitung $P'(t)$ durch $P'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots + n a_n t^{n-1}$ gegeben.
1) Beweisen Sie, dass f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.
2) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$.
3) Finden Sie eine Basis von $f(V)$.