Universität
Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 8

Abgabe: *19. November 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
21. November bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Seien $v_1, \ldots, v_5 \in \mathbb{R}^7$ wie folgt:
$v_1 = (0,1,0,0,2,1,0)$, $v_2 = (0,2,0,1,4,3,0)$, $v_3 = (0,0,0,2,0,0,1)$,
$v_4 = (0,0,0,5,10,2,6)$, $v_5 = (0,0,0,0,0,0,1)$.
Mit dem Eliminationsverfahren von Gauss, finden Sie eine Basis von dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_5) \subset \mathbb{R}^7$.

Aufgabe 2

Sei V ein K-Vektorraum und $W_1, \ldots, W_r$ Unterräume von V. Beweisen Sie:
1) $W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ ist ein Unterraum von V.
2) $W_1 + W_2 + \cdots + W_r = \operatorname{span}(W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_r)$.
3) $\dim(W_1 + W_2 + \cdots + W_r) \leq \sum_{i=1}^{r} \dim(W_i)$

Aufgabe 3

Mit dem Eliminationsverfahren von Gauss finden Sie die Lösungen von

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

Sie müssen $x_1 = 36, x_2 = -12, x_3 = 8, x_4 = -31$ finden.

Aufgabe 4

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Finden Sie die Dimension von $W_1 + W_2 \subset V$.
1) $W_1 = \operatorname{span}((0,1,0))$, $W_2 = \operatorname{span}((1,0,0))$;
2) $W_1 = \{(x,y,z) \mid 2x + y = 0\}$, $W_2 = \operatorname{span}((0,1,0),(0,1,1))$;
3) $W_1 = \{(x,y,z) \mid 2x + y = x + z = 0\}$, $W_2 = \{(x,y,z) \mid x + z = 3x + y + z = 0\}$;

Aufgabe 5

Sei K ein Körper und $K[t]$ der K-Vektorraum von Polynomen mit Koeffizienten in K.
Für jedes $f = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ schreibt man $f(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
Beweisen Sie, dass $V = \{f \in K[t] \mid f(1) = 0\}$ und $W = \{a_0 \mid a_0 \in K\}$ Unterräume von $K[t]$ sind, so dass $V \oplus W = K[t]$.

Aufgabe 6

Sei V der Vektorraum aller reellen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Beweisen Sie, V ein reelle Vektorraum ist, von unendlich Dimension.

Errinerung: Für $f,g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert man $f+g$ und λf durch

$$\begin{array}{rrcl} f+g\colon & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x), \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \lambda f\colon & [0,1] & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda \cdot f(x). \end{array}$$