Übungen - Blatt 7

Abgabe: *12. November 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
14. November bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Finden Sie je eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die die folgende linear unabhängige Familie enthalten.
1) $(1,1,0,1)$, $(1,0,0,0)$.
2) $(1,2,3,4)$, $(1,4,9,16)$.

Aufgabe 2

Finden Sie je eine Basis von $\mathbb{C}^2$, die in der folgenden Menge enthalten ist.
1) $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,5)$.
2) $(\mathbf{i},1)$, $(-1,\mathbf{i})$, $(1,\mathbf{i})$, $(\mathbf{i},-1)$.

Aufgabe 3

Sei $K=\mathbb{Q}$. Was ist die $\mathbb{Q}$-Dimension von V?
1) $V=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{4} \mid a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}$.
3) $V=\mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Sei $K=\mathbb{C}$. Was ist die Dimension von den folgenden K-Unterräumen von $K[t]$?
1) $\operatorname{span}((t+1)^2, t^2, 2t, (t+2)^2)$
2) $\operatorname{span}((t+1)^2, t^2, 2t+1, (t+2)^2-2)$

Aufgabe 5

Sei K ein endlicher Körper, von Charakteristik p mit m Elementen und sei V ein Vektorraum über K mit $\dim(V)=d\in\mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
1) Es gibt genau m^d Elementen in V.
Tipp: Benützen Sie eine Basis mit d Elementen und beschreiben Sie alle möglichen linearen Kombinationen.
2) Der Vektorraum V ist auch ein Vektorraum über $\mathbb{F}_p$.
3) Es gibt $a,b\in\mathbb{N}$, so dass $m=p^a$ und $m^d=p^b$.

Aufgabe 6

Zu beweisen: Die Anzahl von Elementen eines endlichen Vektorraums ist immer eine Potenz einer Primzahl.