Übungen - Blatt 6

Abgabe: *5. November 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
7. November bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Seien $v_1, \dots, v_k \in V$ Vektoren, die linear unabhängig sind, un sei $w \in V$. Beweisen Sie, das die folgende Aussagen äquivalent sind:
1) $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$.
2) $v_1, \dots, v_k, w$ sind linear abhängig.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass $A = \{t^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $K[t]$ ist.

Aufgabe 3

Sei $K = \mathbb{F}_2$.
Berechnen Sie alle Basen des K-Vektorraums $V = K^2$.

Aufgabe 4

Sei $K = \mathbb{F}_5$. Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von K^3?
1) $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,2,0)$, $v_3 = (4,1,1)$.
2) $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,2,1)$, $v_3 = (3,2,4)$.
3) $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,3,0)$.
4) $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,3,0)$, $v_3 = (1,1,1)$, $v_4 = (2,3,1)$.

Aufgabe 5

Sei K ein endlicher Körper. Beweisen die folgenden Aussagen:
1) Die Charakteristik von K ist eine Primzahl $p > 0$. (Benützen Sie Lemma 13).
2) Der Körper K ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_p$, bezüglich der Addition von K und der Skalarmultiplikation, die durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{F}_p \times K & \to & K \\ (\bar{a}, x) & \mapsto & a \cdot x \end{array}$$

gegeben ist. *(Sie müssen beweisen, dass diese eine wohldefinierte Abbildung ist: $a \cdot x = b \cdot x$ wenn $\bar{a} = \bar{b}$, und alle Axiomen von Vektorraümen überprüfen).*

Aufgabe 6

Sei K ein Körper. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ schreibt man $v_m = (t+1)^m \in K[t]$. Beweisen Sie, dass $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $K[t]$ ist.