Universität
Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 5

Abgabe: *29. Oktober 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
31. Oktober bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Sind die folgende Menge $\mathbb{R}$-Unterräume von $\mathbb{R}^2$?
1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+y=0\}$ 2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+y=1\}$
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=0\}$ 4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y=0\}$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und $K[t]$ die Menge von Polynomen mit Koeffizenten in K.
Wir definieren der Grad $\deg(f)$ von einem Polynom $f = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in K[t]$ wie folgt:

$$\deg(f) = \begin{cases} -\infty \text{ falls } f=0, \\ \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} \text{ sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $d \in \mathbb{N}$ definiert man $K[t]_d = \{f \in K[t] \mid \deg(f) \leq d\}$.
1) Ist $K[t]_d$ ein K-Unterraum von $K[t]$?
2) Ist $K[t]_d$ ein Unterring von $K[t]$?

Aufgabe 3

Zeige, dass die Menge $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 4

Sei $V = \mathbb{C}$ und $W = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass W ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V ist, aber kein $\mathbb{C}$-Untervektorraum ist.

Aufgabe 5

Für jedes $x \in \mathbb{C}$ definiert man $V(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid y^2 = x\}$. Beweisen Sie:
1) $V(0) = \{0\}$;
2) $V(x)$ enthält genau zwei Elementen, wenn $x \neq 0$.
Tipp: Schreiben Sie $x = a + \mathbf{i}b$ und finden Sie $c, d \in \mathbb{R}$, so dass $(c + \mathbf{i}d)^2 = a + \mathbf{i}b$.

Aufgabe 6

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

genau eine Lösung in $\mathbb{C}$ hat, wenn $b^2 - 4ac = 0$ und dass sie genau zwei Lösungen in $\mathbb{C}$ hat, wenn $b^2 - 4ac \neq 0$.