Universität
Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 4

Abgabe: *22. Oktober 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
24. Oktober bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Beschreiben Sie die Gruppe $(R^*,\cdot)$, für die folgenden Ringen. Ist diese Gruppe zyklisch?

1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, 2) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$,
3) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, 4) $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$,
5) $\mathbb{R}$, 6) $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2

Finden Sie die Inversen von alle Elementen von $(\mathbb{F}_p)^*$, für $p = 3,7,11$.

Aufgabe 3

Sei p ein Primzahl, $p \neq 2$, und $a \in \mathbb{F}_p^*$ ein Element, so dass $a^2 = \overline{-1}$.
1) Beweisen Sie, dass $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
2) Beweisen Sie, dass $p-1 \in 4\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

Sei R ein Ring und $R[x]$ der Ring von Polynomen mit Koeffizienten in R.
1) Ist $R[x]$ ein Körper?
2) Ist $R[x]$ ein Integritätsbereich?

Aufgabe 5

Sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primzahl, so dass $p = 4k+3$, für ein $k \in \mathbb{N}$.
Auf die Menge $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ definiert man die folgende Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd,bc+ad)\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass R ein Körper mit p^2 Elementen ist.
Tipp: Benüzten Sie Aufgabe 3*, um zu sehen, dass R ein Integritätsbereich ist.*

Aufgabe 6

Seien $m,n \in \mathbb{N}$, so dass $kgV(m,n) = mn$ (kgV meint hier „kleinste gemeinsame Vielfache von m und n”).
Beweisen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ ist.
Tipp: Benüzten Sie Aufgabe 5 von Blatt 2.