Übungen - Blatt 3

Abgabe: *15. Oktober 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
17. Oktober bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Wir sagen, dass zwei Gruppen G, H isomorph sind, wenn es einen Gruppenisomorphismus von G nach H existiert.
Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 6 isomorph zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ oder zu $\mathrm{S}_3 = \mathrm{Bij}(\{1,2,3\})$ ist.

Aufgabe 2

Sei $R = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ die Menge von allen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
Wir definieren Addition und Multiplikation auf R wie folgt: für jede $f, g \in R$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$.
1) Beweisen Sie, dass R ein Ring ist.
2) Ist R kommutativ?
3) Ist R ein Integritätsbereich?
4) Ist R ein Körper?

Aufgabe 3

Welche von den folgenden Gruppen sind isomorph?

1)	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,	2)	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,		
3)	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,	4)	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$,		
5)	$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$,	6)	$\mathbb{Z}/6 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,	7)	$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
8)	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,	9)	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,	10)	$\mathrm{Bij}(\{1,2,3,4\}) = \mathrm{Sym}_4$.

Aufgabe 4

Sei $G = \mathrm{Bij}(\mathbb{R}^2)$ die Gruppe von allen bijektiven Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, wobei die Verknüpfung durch $(f \star g)(x) = f(g(x))$ definiert ist, für $f, g \in G$, $x \in \mathbb{R}$.
Wir definieren $\alpha \in G$ als die Spiegelung an der x-Achse und $\beta \in G$ als die Drehung um den Ursprung $(0,0)$ um den Winkel $2\pi/3$.
1) Bemerken Sie, dass α Ordnung 2 hat und β Ordnung 3 hat.
2) Beweisen Sie, dass $\beta\alpha = \alpha\beta^{-1} = \alpha\beta^2$.
3) Beweisen Sie, dass $\{e, \beta, \beta^2, \alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2\}$ eine Untergruppe von G ist.
4) Zu welcher anderen Gruppe ist diese Gruppe isomorph?

Aufgabe 5

Wir definieren $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ und definieren Addition und Multiplikation auf M wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie, dass M ein Ring ist.
Ist M kommutativ?

Aufgabe 6

Sei G eine kommutative Gruppe. Wir definieren

$$R = \{ f \colon G \to G \mid f \text{ Gruppenhomomorphismus} \}$$

die Menge von allen Gruppenhomomorphismen von G nach G.
Wir definieren Addition und Multiplikation auf R wie folgt: für jede $f,g \in R$ und jedes $x \in G$ definieren wir $(f+g)(x) := f(x) \star g(x)$, wo $\star$ die Verknüpfung von G ist, und $(f \cdot g)(x) := f(g(x))$.
1) Beweisen Sie, dass R ein Ring ist.
2) Ist R kommutativ?
3) *Fakultativ:* Beschreiben Sie R für $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und für $G = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.