Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 2

Abgabe: *8. Oktober 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
10. Oktober bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Beweisen Sie:
Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon G \to H$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1 \\ \varphi(g^{-1}) &= (\varphi(g))^{-1},\ \forall g \in G. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

1) Bestimme alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.
2) Bestimme alle erzeugenden Elemente der zyklischen Gruppen $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$. Was fällt auf?

Aufgabe 3

Was ist die Ordnung von g in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$?
1) $g = \bar{1}, m \geq 2$, 2) $g = \bar{7}, m = 9$ 3) $g = \bar{2}, m = 6$, 4) $g = \bar{6}, m = 14$.

Aufgabe 4

Gibt es ein Element von Ordnung m in der Gruppe G?
1) $m = 2, G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ 2) $m = 2, G = (\mathbb{R}, +)$ 3) $m = 3, G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$ 2) $m = 3, G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Aufgabe 5

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $kgV(m,n) = mn$ (kgV meint hier „kleinste gemeinsame Vielfache von m und n”).
Wir möchten beweisen, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \bar{x} &\mapsto (\bar{x}, \bar{x}) \end{aligned}$$

1. Beweisen Sie, dass φ eine wohldefinierte Abbildung ist (Aus $\bar{x} = \bar{y}$ folgt $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y})$).
2. Beweisen Sie, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.
3. Beweisen Sie, dass φ injektiv ist.
4. Beweisen Sie, dass φ bijektiv ist.

Aufgabe 6

Seien G, H zwei Gruppen. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

1. Ein Gruppenhomomorphismus $G \to H$ ist ein Isomorphismus genau wenn er bijektiv ist.

2. Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ ist eine Gruppe, mit der binäre Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ\colon \quad \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G) &\to \mathrm{Aut}(G) \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \circ \psi \end{aligned}$$