Übungen - Blatt 10

Abgabe: *3. Dezember 2013 in der Vorlesung oder bis 12.00 Uhr im Math. Institut.*
5. Dezember bis 10.30 Uhr im Math. Institut für die Übungsgruppe vom Montag.

Aufgabe 1

Sind die folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $M(2 \times 2;\mathbb{R})$? Wenn ja, bestimme eine Basis und die Dimension; wenn nein, begründe weshalb nicht.

(a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$ (b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ (d) $W_4 = \{A \in M(2\times 2;\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$

Wir definieren ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *wenn* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgende Matrizenprodukten:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $b)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $d)$ $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in M(m \times 3;K)$.

Aufgabe 3

Sei $V = M(2\times 2;K)$ und

$$f: \begin{array}{ccc} V & \to & K \\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \mapsto & a+d \end{array}$$

die Spurabbildung.
Beweisen Sie, dass f K-linear ist, und finden Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) = f(V)$ und $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\{0\}$.

Aufgabe 4

Sei V,W zwei K-Vektorraüme, $f\colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung und $W_1,W_2 \subset W$ Unterräume. Welche von den folgenden Aussagen sind äquivalent? Welche impliziert welche?

1) $W = W_1 \oplus W_2$ 2) $f^{-1}(W_1) \oplus f^{-1}(W_2) = V$
3) $W = W_1 + W_2$ 4) $f^{-1}(W_1) + f^{-1}(W_2) = V$

Aufgabe 5

Für jede $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m \times n; K)$ ist ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(n \times m; K)$.

Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} f\colon M(3 \times 3; K) & \to & M(3 \times 3; K) \\ A & \mapsto & {}^tA - A \end{array}$$

K-linear ist, und finden Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) = f(M(3 \times 3; K))$ und $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\})$.

Aufgabe 6

Seien $A \in M(m \times n; K)$ und $B \in M(n \times r; K)$. Beweisen Sie, dass

$$^t(A \cdot B) = {}^t(B) \cdot {}^t(A).$$