Übungen - Blatt 9

→ 24.11.2014

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Zu beweisen:

1. Für drei verschiedene Punkte $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ gibt es genau ein Element $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$, so dass $\alpha(p_1) = [1:0]$, $\alpha(p_2) = [0:1]$, $\alpha(p_3) = [1:1]$.
2. Wenn $\mathrm{char}(\mathbf{k}) \neq 2$, gilt:

   Für zwei verschiedene Punkte $p_1, p_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ gibt es genau ein Element $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$ von Ordnung 2, so dass $\alpha(p_1) = p_1$ und $\alpha(p_2) = p_2$.

   Was passiert, wenn $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = 2$?

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Finden Sie $\mathrm{dom}(\varphi)$ für die folgenden rationalen Abbildungen:

1.
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) & \dashrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \\ & [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] & \dashrightarrow & [x_0x_1 : (x_1)^2 : x_0x_2 : x_1x_2] \end{array}$$

2.
$$X = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid x_0x_3 = x_1x_2\}$$
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & X & \dashrightarrow & X \\ & [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] & \dashrightarrow & [x_0x_1 : (x_1)^2 : x_0x_2 : x_1x_2] \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \dashrightarrow & [(x_0)^2 : (x_1)^2 : (x_2)^2] \end{array}$$

Aufgabe 3

Sind die rationalen Abbildungen von Aufgabe 2 birational?

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die stereographische Projektion eine birationale Abbildung $K \dashrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist, wobei K die Kugel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

ist.

Aufgabe 5*

Sei $X = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid (x_0)^2 x_1 + (x_1)^2 x_2 + (x_2)^2 x_3 + (x_3)^2 x_0 = 0\}$.
Finden Sie eine birationale Abbildung $\mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \dashrightarrow X$.
Tipp: Ein Punkt $(u,v) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ gibt zwei Punkte $P_1 := [0:1:0:u], P-2 := [1:0:v:0] \in X$. Man kann also $\varphi(u,v) \in X$ definieren als der dritte Punkt von $L \cap X$, wobei $L \subset \mathbb{P}^3(\mathbf{k})$ die Gerade durch die Punkte P_1, P_2 ist (eine Gerade ist das Bild einer linearer Abbildung $\mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \to \mathbb{P}^3(\mathbf{k})$).

Aufgabe 6

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen, so dass $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = p > 0$.
Beweisen Sie, dass der Morphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) & \to & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \\ & x & \mapsto & x^p \end{array}$$

bijektiv ist, aber kein Isomorphismus ist.