Übungen - Blatt 8

→ *27.04.2015*

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Kurve vom Grad 5 und $p_1, \ldots, p_6 \in C$ sechs verschiedene Punkte, die singulär sind.
Beweisen Sie, dass

$$m_{p_i}(C) = 2, \text{für } i = 1, \ldots, 6$$

und dass $m_q(C) = 1$ für jedes Punkt $q \in C \setminus \{p_1, \ldots, p_6\}$.
Tipp: Nehmen Sie $p_1, \ldots, p_6, q$ und noch zwei anderen Punkte von C und beweisen Sie die Existenz eines Polynomes vom Grad 3, das null auf den 9 Punkten ist.

Aufgabe 2*

Existiert eine Kurve C wie in Aufgabe 1 ?

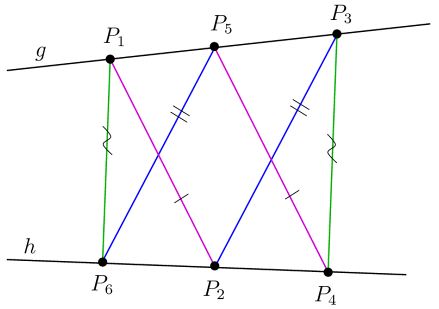
Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen und $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ Punkte in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, die alle verschieden sind.
Sei $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ die Aufblasung von $p_1, \ldots, p_n$. Wir nehmen dann zwei verschiedene Kurven $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ und betrachten die strikt Transformierten $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \subset X$ der Kurven. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{q \in X} I_q(\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) = \deg(C_1) \cdot \deg(C_2) - \sum_{i=1}^{n} m_{p_i}(C_1) \cdot m_{p_i}(C_2).$$

Aufgabe 4

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Der Satz von Pappos (Pappus), in affiner Form: *Liegen 6 Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ von $\mathbb{R}^2$ abwechselnd auf zwei Geraden g und h (p_1, p_2, p_3 sind kollinear und p_4, p_5, p_6 sind kollinear) und sind sowohl das
Geradenpaar $\overline{p_1p_2}$, $\overline{p_4p_5}$ als auch das Geradenpaar $\overline{p_2p_3}$, $\overline{p_5p_6}$ parallel, so sind auch $\overline{p_3p_4}$ und $\overline{p_6p_1}$ parallel.*



Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen und $f_1, \dots, f_r \in \mathbf{k}[x_0, \dots, x_n]$ homogene Polynome. Beweisen Sie, dass die folgende Behauptungen äquivalent sind:

1. Die Menge
$$\{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbf{k}) \mid f_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, r\} = V(f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$
ist leer.
2. Die Menge
$$\{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \mid f_i(x_0, \dots, x_n) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, r\} = V(f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$$
entählt genau einen Punkt: $\{(0, \dots, 0)\}$.
3. $(x_0, \dots, x_n) \subset \sqrt{(f_1, \dots, f_r)}$
4. Es gibt $s \in \mathbb{N}$, so dass $(x_0, \dots, x_n)^s \subset (f_1, \dots, f_r)$.

Tipp: Aus dem Nullstellenstatz folgt, dass $I(V(f_1, \dots, f_r)) = \sqrt{(f_1, \dots, f_r)}$.