Übungen - Blatt 8

→ 17.11.2014

Aufgabe 1

Sei Z ein noetherscher topologischer Raum und $U, U' \subset Z$ zwei offene Teilmengen. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptung äquivalent sind:

1. U und U' liegen dicht in Z;
2. $U \cap U'$ liegt dicht in Z;
3. Für jede offene Teilmenge $V \subset Z$ liegt $U \cap U' \cap V$ dicht in V.

Tipp: Benutzen Sie die irreduzible Zerlegung von Z als $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_r$, wo $Z_i \not\subset Z_j$ wenn $i \neq j$ und Aufgabe 1 von Blatt 7.

Aufgabe 2

Seien $\lambda, \mu \in \mathbf{k} \setminus \{0,1\}$. Wann sind $\mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \setminus \{(0,1,\lambda)\}$ und $\mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \setminus \{(0,1,\mu)\}$ isomorph?

Aufgabe 3*

Beweisen Sie, dass $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ nicht isomorph zu $\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \setminus \{(0,0)\}$ ist.
Tipp: Sehen Sie beide Varietäten als offene Teilmengen von $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen. Finden sie $\mathscr{O}(X)$ in den folgenden Fällen:

1. $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x_1 x_2 = 1\}$,
2. $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k})\} \setminus \{(0,0)\}$,

3*. $X = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid x_0 x_3 = x_1 x_2\} \setminus \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid x_0 = x_1 = 0\}$.

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ unendlich und X eine projektive Varietät.

1. Beweisen Sie, dass jede rationale Abbildung $\mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \dashrightarrow X$ ein Morphismus ist. (Untersuchen Sie zuerst den Fall, in dem $X = \mathbb{P}^m(\mathbf{k})$).
2. Ist die Aussage auch wahr, wenn X eine quasi-projektive Varietät ist?

Aufgabe 6

Sei **k** unendlich. Beweisen Sie, dass die rationale Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \\ [x_0 : x_1 : x_2] & \mapstochar\dashrightarrow & [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1] \end{array}$$

kein Morphismus ist.