Übungen - Blatt 7

→ 20.04.2015

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Kurve vom Grad $d \geq 3$ und $p_1, \ldots, p_5 \in C$ funf verschiedene Punkte.
Beweisen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{5} m_{p_i}(C) \leq 2d$$

Tipp: Wenn eine Konik durch die funf Punkte geht, kann man der Satz von Bézout benutzen. Sonst gibt es eine Gerade durch drei der funf Punkte. Also kann man auch Bézout benutzen.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Kurve vom Grad 4 und $p_1, \ldots, p_r$ die singuläre Punkte von C.
Was sind die Möglichkeiten für r und für $m_{p_i}(C)$?
Für jede Möglichkeit, finden Sie ein Beispiel für eine Kurve, mit $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ oder mit $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.
Tipp: Benutzen Sie der Satz von Bézout, und Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen,

$$C = V((x_0)^2 x_1 + (x_1)^2 x_2 + (x_2)^2 x_0) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \text{ und}$$

$$D = V((x_0)^2 - x_1 x_2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k}).$$

Finden Sie $C \cap D$ und für jede $p \in C \cap D$, berechnen Sie $I_p(C, D)$.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper. Berechnen Sie $I_p(f_i, f_j)$ für $i \neq j$, wo $p = (0,0) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ und $f_i \in \mathscr{O}_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) = \mathscr{O}_p(\mathbb{P}^2(\mathbf{k}))$ (mit eine Eibettung $\mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \to \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, $(x,y) \mapsto [x : y : 1]$), wo

$$f_1 = x, f_2 = y, f_3 = x^2 - y, f_4 = xy - y^2 - x^3, f_5 = xy - y^3 - x^3.$$

Zeichnen Sie ein Bild für $V(f_i) \subset \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$, wenn $\mathbf{k} = \mathbb{R}$.

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper, und $C,D \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ zwei verschiedene Kurven, von Grad d_1 und d_2.

1. Beweisen Sie: Für jedes $p \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ hat man $I_p(C,D) \leq d_1 \cdot d_2$.
2. Finden Sie ein Beispiel wo $I_p(C,D) = d_1 \cdot d_2$, und $m_p(C) = m_p(D) = 1$, für jede $d_1, d_2 \geq 1$.
3. Finden Sie ein Beispiel wo $I_p(C,D) = d_1 \cdot d_2$, und $m_p(C) > 1$, $m_p(D) > 1$, für jede $d_1, d_2 \geq 3$.
4. Finden Sie ein Beispiel wo $I_p(C,D) = 5$, und $m_p(C) = 2$, $m_p(D) = 2$, für $d_1 = d_2 = 3$.