Übungen - Blatt 7

→ 10.11.2014

Aufgabe 1

Sei Z ein nichtleeren topologischer Raum. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Z ist irreduzibel.
2. Jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset Z$ ist irreduzibel.
3. Es gibt eine offene Teilmenge $U \subset Z$, die irreduzibel und dicht ist.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $X = V((x_1)^2 - (x_2)^3) \subset \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ und sei $\varphi \colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \to X$ die Abbildung $x \mapsto (x^3, x^2)$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. φ ist ein Morphismus.
2. φ ist bijektiv.
3. Die Einschränkung von φ auf $\mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \setminus \{(0,0)\}$ ergibt einen Isomorphismus
$$\mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \setminus \{(0,0)\} \to X \setminus \{(0,0)\}.$$
4. φ ist kein Isomorphismus.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass die folgenden Varietäten isomorph sind.

1. $X_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x_2 \neq 0\}$,
2. $X_2 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid x_1 x_2 \neq 0\}$,
3. $X_3 = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid x_0 x_1 = x_2 x_3, x_0 x_2 \neq 0\}$.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper mit $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = 0$. Welche von den folgenden Varietäten sind isomorph?

1. $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$
2. $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$
3. $X_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \mid x_1 \neq 0\}$
4. $X_2 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \mid x_1(x_1 - x_0) \neq 0\}$
5. $X_3 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \mid x_1(x_1 - x_0)(x_1 - 2x_0)(x_1 - 3x_0) \neq 0\}$
6. $X_4 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \mid x_1(x_1 - x_0)(x_1 - 2x_0)(x_1 - 4x_0) \neq 0\}$