Übungen - Blatt 6

→ 13.04.2015

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Für jedes homogene Polynom $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2] \setminus \{0\}$ sind die folgenden Behauptungen äquivalent:
   (a) F ist die Potenz eines homogenen irreduziblen Polynomes.
   (b) $V(F)$ ist irreduzibel.
2. Für jede (abgeschlossene) Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ sind die folgenden Behauptungen äquivalent:
   (a) Es gibt $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ irreduzibel und homogen, so dass $C = V(F)$.
   (b) C ist irreduzibel.
3. Für jedes homogene Polynom $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ ist $V(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ unendlich.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $p \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Kurve und $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Gerade, die keine Komponente von C ist, und so dass $p \in C \cap L$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $I_p(C, L) \geq m_p(C)$
2. $I_p(C, L) > m_p(C) \Leftrightarrow L$ ist eine Tangenterichtung von C im p.

Tipp: Nehmen Sie Koordinaten, so dass $p = [0:0:1]$, L ist die Gerade $x_0 = 0$ und schreiben Sie die Gleichung von C in Koordinaten.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Kurve vom Grad 3, die singulär ist. Beweisen Sie, die folgenden Behauptungen:

1. Es gibt nur einen singulären Punkt von C.

   Tipp: Wenn zwei Punkte singulär sind, nehmen Sie die Gerade durch die Punkte und benutzen Sie Aufgabe 2 um die lokalen Multiplizitäten zu rechnen.
2. Bis auf Koordinatenwechsel, was sind die Möglichkeiten für die Gleichung von C ?

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.
Jede Gerade von $P = \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ist durch

$$\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 = 0\}$$

gegeben, wo $[y_0 : y_1 : y_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$. Die Menge von Geraden von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ bilden also eine Varietät $P^\vee = \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ (die duale Ebene). Ein Punkt $[y_0 : y_1 : y_2] \in P^\vee$ ist eine Gerade $\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid y_0x_0 + y_1x_1 + y_2x_2 = 0\}$ in $P = \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für jedes $p \in P$ ist $\{L \in P^\vee \mid p \in L\}$ eine Gerade von $P^\vee$ (damit findet man, dass $(P^\vee)^\vee = P$).
2. Drei Geraden $L_1, L_2, L_3 \subset P$ haben einen gemeinsamen Punkt genau dann, wenn $L_1, L_2, L_3 \in P^\vee$ kollinear sind.
3. Sei $C \subset P$ eine Konik. Die Menge $\{L \in P^\vee \mid P \text{ ist tangent zu } C\}$ bildet eine Konik von $P^\vee$. Diese *duale* Konik schreibt man $C^\vee$.

Aufgabe 5

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Der Satz von Brianchon: *In einem Sechseck, das eine Konik umschreibt (d.h. alle Seiten sind Tangenten der Konik), schneiden sich die Diagonalen in einem Punkt.*

Tipp: Sehen Sie die sechs Geraden (Seiten) als sechs Punkte $q_1, \dots, q_6 \in (\mathbb{P}^2(\mathbf{k}))^\vee$ und bemerken Sie, dass eine Konik $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, die tangent an alle Geraden ist, eine Konik $C^\vee \subset (\mathbb{P}^2(\mathbf{k}))^\vee$ ist, die durch alle Punkte geht (benutzen Sie Aufgabe 5). Der Satz von Brianchon ist also dual zum Satz von Pascal.