Übungen - Blatt 6

→ 03.11.2014

Aufgabe 1

Eine Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ ist eine abgeschlossene Teilmenge $H = V(F) \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$, wobei $F \in \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Polynom von Grad 1 ist.
Beweisen Sie, dass jede Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ isomorph zu $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{k})$ ist.

Aufgabe 2

Seien $H_1, \ldots, H_m \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ Hyperebenen, so dass $X = \bigcap_{i=1}^m H_i$ nicht leer ist.
Beweisen Sie, dass X isomorph zu $\mathbb{P}^l(\mathbf{k})$ ist, wobei $n - m \leq l < n$.

Aufgabe 3

Eine Konik in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ist eine abgeschlossene Menge $Q = V(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, wo F ein homogen Polynom von Grad 2 ist.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Wenn Q einen Punkt $p \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ enthält, gibt es einen Koordinatenwechsel, so dass eine der folgenden Behauptungen gilt:

$$\begin{array}{l} Q = V((x_0)^2 + \alpha(x_1)^2 + \beta x_0 x_1), \quad \text{wobei } \alpha, \beta \in \mathbf{k}^* \\ Q = V((x_0)^2 - x_1 x_2) \end{array}$$

   Tipp: Wir können annehmen, dass $p = [0 : 0 : 1]$. Es folgt, dass $F = F_2 + x_2 F_1$, wobei $F_i \in \mathbf{k}[x_0, x_1]$ homogen von Grad i ist. Wir können dann annehmen, dass $F_1 = 0$ oder $F_1 = x_1$.

2. Wenn $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen ist und Q irreduzibel, gibt es einen Koordinatenwechsel, so dass $Q = V((x_0)^2 - x_1 x_2)$.

Aufgabe 4

1. Beweisen Sie, dass $Q = V((x_0)^2 - x_1 x_2) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ isomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ ist.

2. Wenn $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen ist, ist jede irreduzible Konik von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ isomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ (zu beweisen).

   Ist es wahr wenn $\mathbf{k}$ nicht algebraisch abgeschlossen ist?

Aufgabe 5

Seien $p_0, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ verschiedene Punkte. Wir nehmen an, dass je $n+1$ dieser $n+2$ Punkte nicht auf einer Hyperebene liegen. Es gibt dann ein $\varphi \in \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{k})$, so dass $\varphi(p_0) = [1 : 0 : \cdots : 0]$, $\varphi(p_1) = [0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$, $\dots$,$\varphi(p_n) = [0 : 0 : \cdots : 1]$, $\varphi(p_{n+1}) = [1 : \cdots : 1]$ (zu beweisen).

Aufgabe 6*

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, seien $U, V \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ zwei nichtleere offene Teilmengen. Jeder Isomorphismus $U \to V$ ist die Einschränkung eines Automorphismus von $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ der Form

$$[x_0 : x_1] \mapsto [ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1],$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbf{k}$, $ad - bc \neq 0$.