Übungen - Blatt 5

→ 30.03.2015

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein endlicher Körper und $F, G \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ zwei homogene Polynome, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Beweisen Sie, dass $V(F,G) = V(F) \cap V(G)$ höchstens $\deg F \cdot \deg G$ Punkte enthält.

Tipp: Der Körper $\overline{\mathbf{k}}$ ist unendlich. Beweisen Sie, dass $F, G \in \overline{\mathbf{k}}[x_0, x_1, x_2]$ auch keinen gemeinsamen Teiler haben und benutzen Sie den kleinen Satz von Bézout.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1]$ ein homogenes Polynom vom Grad m. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für alle $(a_0, a_1) \in \mathbf{k}^2 \setminus \{0\}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

   (a) $F(a_0, a_1) = 0$

   (b) $a_1 x_0 - a_0 x_1$ teilt F.

2. Es gibt $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{k}, i = 1, \ldots, m$ so dass

$$F = \textstyle\prod_{i=1}^{m} (\alpha_i x_1 - \beta_i x_0).$$

3. Die Menge $V(F) \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ enthält höchstens m Punkte.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper und $p = (0,0)$. Jedes Polynom $P \in \mathbf{k}[x_1, x_2]$ kann man schreiben als

$$P = \sum_{i=0}^{\deg P} P_i,$$

wo $P_i \in \mathbf{k}[x_1, x_2]$ homogen ist. Man definiert also $m_p(P) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid P_m \neq 0\}$ wenn $P \neq 0$ und $m_p(0) = \infty$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Die Abbildung $m_p \colon \mathbf{k}[x_1, x_2] \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist eine Valuation. Diese induziert also eine Valuation $\mathbf{k}(x_1, x_2) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

2. Der Ring $\{f \in \mathbf{k}(x_1, x_2) \mid m_p(f) \geq 0\}$ ist $\mathscr{O}_p$. Sein Ideal $\{f \in \mathbf{k}(x_1, x_2) \mid m_p(f) > 0\}$ ist $\mathfrak{m}_p$.

3. Für jedes $P = \sum_{i=0}^{\deg P} P_i \in \mathbf{k}[x_1, x_2]$ ist $m_p(P)$ die Multiplizität der Kurve

$$\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid \textstyle\sum_{i=0}^{n} (x_0)^{\deg P - i} P_i\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$$

   im Punkt $[1:0:0]$.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen, $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad d, so dass $F(1,0,0) \neq 0$.

1. Für jedes $\lambda \in \mathbf{k}$ sind die folgenden Behauptungen äquivalent:
   (a) Die Menge $V(F, x_2 - \lambda x_1)$ enthält genau d Punkte.
   (b) Das Polynom $F(x_0, x_1, \lambda x_1) \in \mathbf{k}[x_0, x_1]$ hat genau d Nullstellen in $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$.
   (c) Das Polynom $F(x, 1, \lambda) \in \mathbf{k}[x]$ hat genau d Nullstellen in $\mathbf{k}$.
   (d) Die Resultante $R_{F(x,1,\lambda), \frac{\partial F(x,1,\lambda)}{x}}$ verschwindet nicht (wenn wir die Resultante von $F(x,1,\lambda), \frac{\partial F(x,1,\lambda)}{x}$ in $\mathbf{k}[x]$ betrachten).
   (e) λ ist keine Nullstelle von der Resultante $R_{F(x,1,y), \frac{\partial F(x,1,y)}{x}} \in \mathbf{k}[y]$ (wenn wir die Resultante von $F(x,1,y), \frac{\partial F(x,1,y)}{x}$ in $\mathbf{k}[y][x]$ betrachten).

2. Die obere Behauptungen sind falsch für nur endlich viele $\lambda \in \mathbf{k}$.

3. Die Menge $\{[a_0 : a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid V(F, a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2)$ enthält genau d Punkte$\}$ ist offen und dicht in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$.

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen, $d \geq 1$ und $p_0(u,v), p_1(u,v), p_2(u,v) \in \mathbf{k}[u,v]$ drei homogene Polynome vom Grad d, die keinen gemeinsamen Teiler haben.
Nach (Blatt 3-Aufgabe 6) ist

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) & \to & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \\ & [u:v] & \mapsto & [p_0(u,v) : p_1(u,v) : p_2(u,v)] \end{array}$$

ein Morphismus, und $\rho(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$ in einer Kurve von Grad $\leq \max\{1, 2(d-1)\}$ enthalten.

1. Beweisen Sie, dass $\rho(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$ in einer Kurve vom Grad $\leq d$ enthalten ist. (Benutzen Sie Aufgabe 3 und den Durchschnitt mit einer Geraden).

2. Beweisen Sie, dass $\rho(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$ in einer irreduziblen Kurve vom Grad $\leq d$ von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ enthalten ist.

   Tipp: Beweisen Sie, dass $\rho(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$ irreduzibel ist, weil $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ irreduzibel ist.

3. Finden Sie Beispiele, wo der Grad d ist, und Beispiele, wo der Grad kleiner als d ist.