Übungen - Blatt 5

→ 27.10.2014

Aufgabe 1

Für $i = 0, 1, 2$ sei $U_i \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ die offene Menge

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid x_i \neq 0\}.$$

Beschreiben Sie die Punkte von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ die nur in einem U_i liegen.

Aufgabe 2

Finden Sie den Abschluss von $(\varphi_0)^{-1}(X)$, wobei

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^3(\mathbf{k}) & \to & \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \\ (\varphi_0)^{-1} : (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & [1 : x_1 : x_2 : x_3] \end{array}$$

1. $X = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbf{k}\}$.
2. $X = V(x_1, x_2x_3 - 1) \subset \mathbb{A}^3$.
3. $X = V(x_1) \subset \mathbb{A}^3$.

Tipp: Die Antwort sollte vom Körper (unendlich oder endlich) abhängig sein.

Aufgabe 3

Eine Gerade in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ist eine abgeschlossene Menge $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, die durch eine Gleichung von Grad 1 definiert ist.

1. Finden Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ und der Menge von Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$.
2. Beweisen Sie, dass durch zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ genau eine Gerade geht.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen und $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom von Grad d, $f \neq 0$. Wir schreiben

$$f = f_0 + \cdots + f_d,$$

wobei $f_i \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ homogen von Grad i ist. Wir definieren $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ und wie immer $(\varphi_0)^{-1} \colon \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \to \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [1 : x_1 : \cdots : x_n]$.
Beweisen Sie, dass der Abschluss von $(\varphi_0)^{-1}(X)$ in $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ gleich

$$V(x_0^d f_0 + (x_0)^{d-1} x_1 + \cdots + x_0 f_{d-1} + f_d)$$

ist.

Tipp: Nehmen Sie ein homogenes Polynom, das null ist auf $(\varphi_0)^{-1}(X)$, betrachten Sie seine Einschränkung auf $\mathbb{A}^n(k)$ und wenden Sie den Nullstellensatz an.

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen, $n \geq 3$, $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$, $n \geq 3$ und

$$Z = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \mid x_1 = x_2 = 0\}.$$

Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. $f \in \mathbf{k}^*$;
2. $V(f) = \emptyset$;
3. $V(f) \subset Z$.

Tipp: Für $(3) \Rightarrow (1)$ nehmen Sie an, dass $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathbf{k}^*$ und führen dies zu einem Widerspruch. Untersuchen Sie zuerst den Fall $f \in \mathbf{k}[x_3, \dots, x_n]$ und dann den Fall f von Grad $d \geq 1$ in x_1 (oder x_2). Schreiben Sie $f = (x_1)^d a_d + \dots x_1 a_1 + a_0$, wobei $a_i \in \mathbf{k}[x_2, \dots, x_n]$. Finden Sie $(x_2, \dots, x_n)$, so dass $x_2 \cdot a_d \neq 0$ und zusätzlich x_1, so dass $f = 0$.

Aufgabe 6

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen. Wir definieren eine quasi-affine Varietät $X \subset \mathbb{A}^4(\mathbf{k})$ durch

$$X = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{A}^4(\mathbf{k}) \mid x_1 x_4 = x_2 x_3\} \setminus \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{A}^4(\mathbf{k}) \mid x_2 = x_4 = 0\}.$$

Sei $\varphi \colon X \to \mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ der Morphismus

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \\ (x_1, \dots, x_4) & \mapsto & \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} & \text{wenn} \quad x_2 \neq 0, \\ \frac{x_3}{x_4} & \text{wenn} \quad x_4 \neq 0. \end{cases} \end{array}$$

Beweisen Sie, dass es keine Polynome $f, g \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_4]$ gibt, so dass $g(x_1, \dots, x_4) \neq 0$ für jedes $(x_1, \dots, x_4) \in X$ und $\frac{f(x_1, \dots, x_4)}{g(x_1, \dots, x_4)} = \varphi(x_1, \dots, x_4)$ für jedes $(x_1, \dots, x_4) \in X$.

Tipp: Betrachten Sie

$$A(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 x_3, x_1, x_2 x_3, x_2), B(x_1, x_2, x_3) = g(x_1 x_3, x_1, x_2 x_3, x_2) \in \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3].$$

Beweisen Sie, dass $B(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ wenn $x_2 \neq 0$ oder $x_3 \neq 0$ und benutzen Sie Aufgabe 5 um zu bemerken, dass $B \in \mathbf{k}^*$ liegt. Was muss A sein?