Übungen - Blatt 4

→ 23.03.2015

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper, seien $F, G \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ zwei homogene Polynome, die irreduzibel sind, mit $\deg F = 1$, $\deg G = 2$. Beweisen Sie (mit Koordinatenwechseln und Rechnungen), dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Die Menge $V(F,G) = V(F) \cap V(G)$ enthält genau einen Punkt.
2. Es gibt einen Punkt $p \in V(F,G)$ so dass die Tangentenrichtungen von $V(F)$ in p und $V(G)$ gleich sind.

Aufgabe 2

Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ zwei Koniken. Finden Sie Beispiele für K_1, K_2, so dass $K_1 \cap K_2$ genau r Punkte enthält, mit $r \in \{0,1,2,3,4\}$ (es sind fünf Paare (K_1, K_2) zu finden).
Tipp: Für jedes Beispiel können Sie K_1 als die Konik $\{[u^2 : uv : v^2] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\}$ nehmen.

Aufgabe 3

Seien $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ fünf verschiedene Punkte. Beweisen Sie mit dem Satz von Bézout (zwei Kurven $C, D \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ohne gemeinsame Komponente schneiden sich in höchstens $\deg C \cdot \deg D$ Punkten), dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Es gibt eine Konik durch $p_1, \dots, p_5$ (irreduz. abgeschlossene Kurve von $\mathbb{P}^2$ von Grad 2).
2. Es gibt genau eine Konik durch $p_1, \dots, p_5$.
3. Es gibt keine Gerade durch drei der Punkte $p_1, \dots, p_5$.

Aufgabe 4

1. Beweisen Sie, dass die Menge
$$U \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})^5 = \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$$
offen ist, wo U die Menge von 5-Tupeln $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})^5$ ist, wo alle p_i verschieden sind und so dass genau eine Konik durch die p_i geht.

2. Beweisen Sie, dass U nicht leer ist, genau wenn $\mathbf{k}$ mindestens 4 Punkte enthält.

3. Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})^5$ irreduzibel ist, wenn $\mathbf{k}$ unendlich ist.

   Tipp: Finden Sie eine offene Menge $V \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})^5$, die dicht und irreduzibel ist (z.B. isomorph zu $\mathbb{A}^{10}(\mathbf{k})$).

4. Beweisen Sie, dass U dicht in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})^5$ ist, wenn $\mathbf{k}$ unendlich ist.

Aufgabe 5

Benutzen Sie die Resultante um die singulären Punkte der Kurve $K = V(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, mit $\mathrm{char}(\mathbf{k}) \neq 2$ und
$$F = {x_0}^2{x_1}^2 - 2{x_0}^2 x_1 x_2 + {x_0}^2{x_2}^2 + x_0{x_1}^2 x_2 - {x_1}^2{x_2}^2.$$