Übungen - Blatt 3

→ 16.03.2015

Aufgabe 1

Seien $K_1, K_2, K_3 \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ die folgenden Kurven

1. $K_1 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid x_0 = 0\}$;
2. $K_2 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid x_0 x_1 = {x_2}^2\}$;
3. $K_3 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid x_0 x_1 x_2 = {x_1}^3 - {x_0}^3\}$.

Sei $p = [0 : 0 : 1]$. Berechnen Sie die strikt Transformierten der Kurven in $B\ell_p(\mathbb{P}^2(\mathbf{k}))$, sowie deren Durchschnitte mit der exzeptionellen Kurve.

Aufgabe 2

Sei R ein Integritätsbereich.
Eine Valuation auf R ist eine Abbildung $v \colon R \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so dass

1. $v(r) = \infty \Leftrightarrow r = 0$ für jedes $r \in R$;
2. $v(ab) = v(a) + v(b)$ für alle $a, b \in R$;
3. $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ für alle $a, b \in R$.

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $v(1) = v(-1) = 0$.
2. Die Menge $A = \{f \in R \mid v(f) \geq 0\}$ ist ein Unterring von R.
3. Die Menge $I = \{f \in R \mid v(f) > 0\}$ ist ein Ideal von A.
4. Es gibt eine eindeutige Valuation v_K auf $K = \mathrm{Frac}(R)$, so dass $v_{K|_R} = v$.

Aufgabe 3

Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Primideal mit $\bigcap_{m=0}^{\infty} I^m = \{0\}$. Wir definieren eine Abbildung $v \colon R \to \mathbb{N}$ wie folgt:

- Wenn $r \in R \setminus I$, definiert man $v(r) = 0$.
- Wenn $r \in I$, so ist $v(r) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid r \in I^m\}$.

1. Beweisen Sie, dass v eine Valuation auf R ist.
2. Für $R = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, $p \in \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ und $I = \{f \in R \mid f(p) = 0\}$, was können Sie über diese Valuation sagen?

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ algebraisch abgeschlossen.
Wir sagen, dass zwei Kurven $K_1, K_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ projektiv-äquivalent sind, wenn $K_1 = g(K_2)$ für ein Element $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbf{k})) = \mathrm{PGL}(3, \mathbf{k})$.
Finden Sie alle Äquivalenzklassen von Kubiken (irreduzible Kurven $K \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ von Grad 3), die einen singulären Punkt haben.
Bis auf Koordinatenwechsel können Sie annehmen, dass K ein singulärer Punkt in $p = [0:0:1]$ hat. Was ist dann die Gleichung von K?

Aufgabe 5

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Beweisen Sie, dass

$$K = \{[u^3 : u^3 + uv^2 : v^3] \mid [u : v] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k})\}$$

abgeschlossen in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ist. Finden Sie die Gleichung von K.

Aufgabe 6

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $d \geq 1$ und $p_0(u,v), p_1(u,v), p_2(u,v) \in \mathbf{k}[u,v]$ drei homogene Polynomen von Grad d, die keinen gemeinsamen Teiler haben.
Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) & \to & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \\ & [u:v] & \mapsto & [p_0(u,v) : p_1(u,v) : p_2(u,v)] \end{array}$$

ein Morphismus ist.
Beweisen Sie, dass $\rho(\mathbb{P}^1(\mathbf{k}))$ in einer Kurve von Grad $\leq \max\{1, 2(d-1)\}$ enthalten ist.
Tipp: Betrachten Sie die $\mathbf{k}$*-lineare Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]_m & \to & k[u,v]_{md} \\ F & \to & F(p_0, p_1, p_2), \end{array}$$

wo $\mathbf{k}[x_0,x_1,x_2]_m$ *die Menge von homogenen Polynomen von Grad m in* x_0, x_1, x_2 *ist, und* $\mathbf{k}[u,v]_{md}$ *die Menge von homogenen Polynomen von Grad md in u,v ist. Was ist die Dimension des Kerns?*