# Übungen - Blatt 3

*→ 06.10.2014*

## Aufgabe 1-2

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $f, g \in \mathbf{k}[x,y]$ zwei Polynome, die koprim sind. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $f, g$ sind auch koprim in $\mathbf{k}(x)[y]$.
2. $(f, g) = (1)$ in $\mathbf{k}(x)[y]$.
3. Es gibt $R, S \in \mathbf{k}(x)[y]$, so dass $fR + gS = 1$.
4. Es gibt $D \in \mathbf{k}[x] \setminus \{0\}$ und $A, B \in \mathbf{k}[x,y]$, so dass $Af + Bg = D$.
5. Die Menge $V(f, g) \subset \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ ist endlich.

## Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ ist irreduzibel;
2. $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ ist zusammenhängend;
3. $\mathbf{k}$ ist unendlich.

## Aufgabe 4

Sei $Z$ ein topologischer Raum und $f: Z \to \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ eine Abbildung, sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Die Abbildung $f$ ist stetig.
2. Für jedes Polynom $P \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ ist $f^{-1}(V(P))$ abgeschlossen in $Z$.

## Aufgabe 5

Welche sind die irreduzible Teilmengen von $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$?

## Aufgabe 6

Welche sind die irreduzible Teilmengen von $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$, wenn $\mathbf{k}$ unendlich ist?

*Tipp: Benutzen Sie Aufgaben* 1 *und* 3. *Die Antwort sollte sein:* $\emptyset$, $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$, *Punkte und die Mengen* $V(f)$, *wobei* $f$ *irreduzibel ist.*