Übungen - Blatt 2

→ 09.03.2015

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper, seien $F,G \in \mathbf{k}[x_0,x_1,x_2]$ zwei homogene Polynome, die irreduzibel sind. Wenn $V(F,G) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ unendlich ist, gibt es $\lambda \in \mathbf{k}^*$, so dass $G = \lambda F$.
Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 1-2 von Blatt 3 vom ersten Semester.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Finden Sie die Punkte von $K = V(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, die Multiplizität ≥ 2 haben, sowie die Tangentenrichtungen in jedem solchen Punkt.

1. $F = {x_0}^5 + {x_1}^4 x_2$;
2. $F = {x_0}^4 + {x_0}^2{x_2}^2 + 2x_0x_1{x_2}^2 + {x_1}^2{x_2}^2$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Beweisen Sie, dass jede Konik $K \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ glatt ist (das bedeutet, dass jeder Punkt von K glatt ist).
Tipp: Nehmen Sie an, dass $p \in K$ singulär ist. Bis auf Koordinatenwechsel ist $p = [0:0:1]$. Was ist dann die Gleichung von K? Ist sie irreduzibel?

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Beweisen Sie dass

$$K = \{[u^5 : u^3v^2 + u^3v^2 : v^5] \mid [u:v] \in \mathbb{P}^1(\mathbf{k})\}$$

abgeschlossen in $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ist. Finden Sie die Gleichung von K.