Übungen - Blatt 2

→ 29.09.2014

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper, $n \geq 1$ und $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_l \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Beweisen Sie, dass

$$V(f_1, \ldots, f_m) \cup V(g_1, \ldots, g_l) = V(\{f_i g_j\}_{i=1,j=1}^{m,l}).$$

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. $I(\mathbb{A}^n(\mathbf{k})) = (0)$;
2. $\mathbf{k}$ ist unendlich.

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $n \geq 1$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $V(S) = V(I(V(S)))$ für jede Teilmenge $S \subset \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$.
2. $I(X) = I(V(I(X)))$ für jede Teilmenge $X \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$.

Aufgabe 4

Sei Z ein topologischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für alle Teilmengen $X_1, X_2 \subset Z$ hat man $\overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$.
2. Seien $F \subset X \subset Z$ Teilmengen. Die Menge F ist abgeschlossen in X genau wenn $F = \overline{F} \cap X$.
3. Eine Teilmenge $F \subset X$ liegt dicht in X genau wenn $U \cap F \neq \emptyset$ für jede nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring mit $A \neq \{0\}$.

1. Zu zeigen: es existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A$.
2. Der Kern von φ ist $n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 0$. Zeigen Sie:

   $$A \text{ ist ein Integritätsbereich} \Rightarrow n = 0 \text{ oder } n \text{ ist ein Primzahl.}$$

   Man sagt, dass n die Charakteristik des Rings A ist.
3. Vergleichen Sie die Charakteristik von A mit jener eines Unterrings $B \subset A$.
4. Was sind die Charakteristiken von $\mathbb{Z}[X]/(2, X^2+3)$ und von $\mathbb{Z}[i]/(1+3i)$?

Aufgabe 6

Sei K ein endlicher Körper. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
1) Die Charakteristik von K ist eine Primzahl $p > 0$. (Benützen Sie Aufgabe 5).
2) Der Körper K ist ein Vektorraum über $\mathbb{F}_p$ bezüglich der Addition von K und der Skalarmultiplikation, die durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p \times K & \to & K \\ (\bar{a}, x) & \mapsto & a \cdot x \end{array}$$

gegeben ist, wobei $\bar{a} \in \mathbb{F}_p$ die Klasse von $a \in \mathbb{N}$ ist.
3) Der Körper K enthält p^r Elemente, wobei $r \geq 1$.