Jérémy Blanc
Christian Urech
Susanna Zimmermann

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 1

→ 02.03.2015

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, seien $X \subset \mathbb{P}^m(\mathbf{k})$ und $Y \subset \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ lokal abgeschlossen und irreduzibel, $f_0, \ldots, f_n \in \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_m]$ homogen von gleichem Grad, $g_0, \ldots, g_m \in \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ homogen von gleichem Grad und so dass

1. Es gibt eine offene nichtleere Menge $U \subset X$, so dass für jedes $p = [x_0 : \cdots : x_m] \in U$ sind $q_i = f_i(x_0, \ldots, x_m)$ nicht alle null,
$$q = [q_0 : \cdots : q_n] = [f_0(x_0, \ldots, x_m) : \cdots : f_n(x_0, \ldots, x_m)] \in Y$$
und $[g_0(q_0, \ldots, q_n) : \cdots : g_m(q_0, \ldots, q_n)] = [x_0 : \cdots : x_m]$.
2. Es gibt eine offene nichtleere Menge $V \subset Y$, so dass für jedes $p = [x_0 : \cdots : x_n] \in V$ sind $q_i = g_i(x_0, \ldots, x_n)$ nicht alle null,
$$q = [q_0 : \cdots : q_m] = [g_0(x_0, \ldots, x_n) : \cdots : g_m(x_0, \ldots, x_n)] \in Y$$
und $[f_0(q_0, \ldots, q_n) : \cdots : f_m(q_0, \ldots, q_n)] = [x_0 : \cdots : x_m]$.

Beweisen Sie, dass die rationale Abbildungen

$$\psi \colon [x_0 : \cdots : x_m] \mapstochar\dashrightarrow [f_0(x_0 : \cdots : x_m) : \cdots : f_n(x_0, \ldots, x_m)]$$
$$\varphi \colon [x_0 : \cdots : x_n] \mapstochar\dashrightarrow [g_0(x_0 : \cdots : x_n) : \cdots : g_m(x_0, \ldots, x_n)]$$

sind birationale Abbildungen $\psi \colon X \dashrightarrow Y$ und $\varphi \colon Y \dashrightarrow X$, so dass $\psi\varphi = \mathrm{id}_Y$ und $\varphi\psi = \mathrm{id}_X$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Seien

$$\begin{aligned} X &= \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid x_0x_3 = x_1x_2\} \\ Y &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3(\mathbf{k}) \mid x_1 = (x_3)^2 + (x_2)^3\} \end{aligned}$$

Finden Sie eine birationale Abbildung $X \dashrightarrow Y$.
Tipp: Wenn Sie nichts finden, finden Sie zuerst birationale Abbildungen $f \colon \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \dashrightarrow X$ und $g \colon \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \dashrightarrow Y$ (bemerken Sie dazu, dass x_1 von den andern Variablen abhänging ist) und benutzen dann $g \circ f^{-1}$.

Aufgabe 3

Finden Sie eine birationale Abbildung $X \dashrightarrow Y$, wo

1. $X = \mathbb{P}^2, Y = \mathbb{A}^2$;
2. $X = \mathbb{A}^2, Y = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid (x_0)^2 = x_1 x_2\}$;
3. $X = \mathbb{P}^2, Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
4. $X = \mathbb{P}^1, Y = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \mid (x_0)^2 + (x_1)^2 - (x_2)^2 = 0\}$.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Sei $p = (0,0) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$. Wir definieren die Aufblasung von p in $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ als der Morphismus $\pi\colon B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) \to \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$, wo

$$B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) = \{((x,y),[u:v]) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \mid xv = yu\}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) & \to & \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \\ & ((x,y),[u:v]) & \mapsto & (x,y). \end{array}$$

Wir definieren $U_1, U_2 \subset B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k}))$ als die Bilden von

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) & \to & U_1 \\ (x,y) & \to & ((x,xy),[1:y]) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) & \to & U_2 \\ (x,y) & \to & ((xy,y),[x:1]) \end{array}$$

Finden Sie die Gleichung von $\pi^{-1}(Z)$ in der Karten $\mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \simeq U_1, \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \simeq U_2$:

1. $Z = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^2 + y^3 = x^5\}$.
2. $Z = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x + y^2 = x^3\}$.
3. $Z = \{(t^3, t^4) \mid t \in \mathbf{k}\}$.

Probieren Sie, Bilden zu machen, wenn $\mathbf{k} = \mathbb{R}$.