Übungen - Blatt 12

→ 16.02.2015

Aufgabe 1

Sei Z ein topologischer Raum und $W \subset Z$ eine irreduzible Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Jede nichtleere offene Menge $U \subset W$ ist irreduzibel.
2. Der Abschluss $\overline{W}$ von W in Z ist auch irreduzibel.
3. Die Menge W ist dicht in ihrer Abschluss $\overline{W}$.

Aufgabe 2

Sei $X \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^m(\mathbf{k})$ abgeschlossen, gegeben durch einen irreduziblen homogenen Polynom von Grad $(1,a)$, mit $a \geq 0$. Beweisen Sie, dass X isomorph zu $\mathbb{P}^m(\mathbf{k})$ ist.

Aufgabe 3

Sei X eine irreduzible quasi-projektive Varietät und $Y \subset X$ eine lokal abgesch. Teilmenge, die Isomorph zu $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ ist. Beweisen Sie, dass X nicht isomorph zu einer quasi-affine Varietät ist.
Tipp: Beweisen Sie, dass jede Morphismus $X \to \mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ konstant auf Y ist.
Bemerken Sie, dass $B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k}))$ (cf unten) nicht isomorph zu einer quasi-affine Varietät ist.

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Sei $p = (0,0) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$. Wir definieren die Aufblasung von p in $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ als der Morphismus $\pi\colon B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) \to \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$, wo

$$B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) = \{((x,y),[u:v]) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \times \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \mid xv = yu\}$$

und

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k})) & \to & \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \\ & ((x,y),[u:v]) & \mapsto & (x,y). \end{array}$$

Wir definieren $U_1, U_2 \subset B\ell_p(\mathbb{A}^2(\mathbf{k}))$ als die Bilden von

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) & \to & U_1 \\ (x,y) & \to & ((x,xy),[1:y]) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) & \to & U_2 \\ (x,y) & \to & ((xy,y),[x:1]) \end{array}$$

Finden Sie die Gleichung von $\pi^{-1}(Z)$ in der Karten $\mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \simeq U_1, \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$:

1. $Z = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^3 + y^4 = x^5\}$.
2. $Z = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid (y-x^2)(y+x^2) = x^5\}$.
3. $Z = \{(t^2,t^3) \mid t \in \mathbf{k}\}$