Jérémy Blanc
Christian Urech

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 11

→ 8.12.2014

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ irreduzibel und $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$. Weil $I(X) = \sqrt{(f)} = (f)$, ist ein Punkt $p \in X$ singulär, genau wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ für jedes i.

1. Beweisen Sie, dass X Dimension $n-1$ hat.
2. Finden Sie X_{sing}, in den folgenden Fällen:
   (a) $n = 2$, $f = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 1$.
   (b) $n = 3$, $f = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 1$.
   (c) $n = 2$, $f = (x_1)^2 - (x_2)^2 + (x_1)^3$.
   (d) $n \geq 2$, $f = (x_1)^4 + (x_2)^4 + \dots + (x_n)^4$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ unendlich,

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3(\mathbf{k}) \mid x_1 x_2 - (x_3)^2 = 1\}, \text{ und } Y = \mathbb{A}^2(\mathbf{k}).$$

Beweisen Sie, dass $\mathscr{O}_{X,p}$ und $\mathscr{O}_{Y,q}$ isomorph sind, für jedes $p \in X$ und jedes $q \in Y$.

Aufgabe 3

Sei

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3(\mathbb{C}) \mid x_1 x_2 = x_3^2\}.$$

Für welche $p, q \in X$ sind $\mathscr{O}_{X,p}$ und $\mathscr{O}_{X,q}$ isomorph?

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ unendlich. Finden Sie $\mathrm{dom}(\varphi)$ für die folgenden rationalen Abbildungen. Ist φ birational?

1.
$$\begin{aligned}\varphi: \quad \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) &\dashrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbf{k})\\ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] &\dashrightarrow [x_0^3 : x_0(x_0x_1 + x_2^2) : x_0^2x_2 : x_2(x_0x_1 + x_2^2)]\end{aligned}$$

2.
$$X = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbf{k}) \mid x_0x_3 = x_1x_2\}$$
$$\begin{aligned}\varphi: \quad X &\dashrightarrow X\\ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] &\dashrightarrow [x_0^3 : x_0(x_0x_1 + x_2^2) : x_0^2x_2 : x_2(x_0x_1 + x_2^2)]\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Seien X, Y irreduzible quasi-projektive Varietäten und $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ eine birationale Abbildung.
Zu beweisen:
Es gibt $U \subset X$, $V \subset Y$ offen und dicht, so dass die Einschränkung von φ ein Isomorphismus $U \to V$ ist.