Übungen - Blatt 1

→ 22.09.2014

Aufgabe 1

Finden Sie eine Parametrisierung von

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{Q} \mid x^2+y^3+z^3=0\}.$$

Tipp: Wenn $x \neq 0$ *kann man* $t = y/x$ *und* $u = z/x$ *wählen.*

Aufgabe 2

Sei A ein Ring. Beweisen Sie die folgende Behauptung:

$$A[X] \text{ ist ein Integritätsbereich} \Leftrightarrow A \text{ ist ein Integritätsbereich.}$$

Aufgabe 3

Sei A ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ zwei Ideale. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Ideale von A sind.

1. $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$;
2. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a+b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$;
3. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{\sum_{i=1}^n a_i b_i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}, b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b}, n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in \mathfrak{a}\}$ (heisst Wurzel oder Radikal von $\mathfrak{a}$).

Vergleichen Sie $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. Welche enthalten einander? Sind sie gleich?
Gleiche Frage für $\mathfrak{a}$ und $\sqrt{\mathfrak{a}}$.

Aufgabe 4

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ definiert man $X_i = V(y - ix) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.
Beweisen Sie, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ keine algebraische Teilmenge von $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring. Man definiert Spec A als die Menge aller Primideale von A und für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ definiert man $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$.
2. $V(A) = \emptyset$, $V((0)) = \operatorname{Spec} A$.
3. $V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap\limits_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$ für alle Familien $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ von Idealen in A.

Die Menge Spec A ist also ein topologischer Raum, wenn man die $V(\mathfrak{a})$ als die abgeschlossenen Mengen von Spec A definiert (Zariski-Topologie).

Aufgabe 6

Für jeden der nachfolgenden Ringe A finden Sie alle Ideale, alle Primideale, und alle Maximalideale:

1. $A = \mathbb{Z}$,
2. $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. $A = \mathbb{R}$.
4. A ist ein Körper.
5. $A = \mathbb{C}[X]$ (komplexe Polynome in einer Variablen).