KOMMUTATIVE ALGEBRA - I - HERBSTSEMESTER 2011

JÉRÉMY BLANC

Introduktion

Die Kommutative Algebra ist die Theorie der kommutativen Ringe und der Moduln über diesen. Ist wichtig für $\rightarrow$ Algebraische Geometrie / Komplexe Analysis / Algebraische Zahlentheorie.

Ich lese das erste Semester. Elisa Gorla wird das zweite Semester lesen. Um die Kreditpunkte zu erhalten müssen Sie 75% der Übungen bearbeiten.

Literatur:

Atiyah, MacDonald	*Introduction to Commutative Algebra*
Brüske, Ischebeck, Vogel	*Kommutative Algebra*
Eisenbud	*Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*

Inhalt:
Zusammenfassung der Themen die in der „Kommutative Algebra“ Vorlesung gelernt werden:

(1) Ringe, Ideale,...
(2) Bruchringe (Quotientringe) und Lokalisierung, Lokale Ringe
(3) Primärzerlegung, Annulator, exakte Sequenzen
(4) reguläre Ringe, graduierte Ringe und graduierte Moduln,
(5) Hilbert-Funktion und Hilbert-Polynom, projektive Moduln, Auflösungen.
(6) Homologische Algebra (Ext / Tor,..)

1. Ringe - Erinnerung

1.1. Definition von Ringen.

Definition. Ein Ring ist eine Menge A mit zwei inneren binären Verknüpfungen $+$ und $\cdot$

$$\begin{array}{rcl} +: A\times A & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot: A\times A & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

so dass gilt:

(1) $(A,+)$ ist eine abelsche Gruppe.
(2) Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ: $a\cdot(b\cdot c)=(a\ \cdot b)\cdot c$.
(3) Die Distributivgesetzte

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c, (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \forall a,b,c\in A$$

sind erfüllt.

Das neutrale Element 0 von $(A,+)$ heisst Nullelement des Ringes A.

Bemerkung. $0\in A$ ist ein absorbierendes Element für die Multiplikation d.h.: $\forall a\in A$ hat man $a\cdot 0=0$. (Aufgabe)

In dieser Vorlesung werden alle Ringe (wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt) kommutativ sein und eine eins haben, d.h.: $a\cdot b=b\cdot a$, $\forall a,b\in A$ **und** $\exists 1\in A$ **mit** $1\cdot a=a\cdot 1=a \forall a\in A$**.**

Man sagt, dass $B\subset A$ **ein Unterring von** A **ist wenn** B **die Elemente** $0,1\in A$ **enthält und wenn** $a,b\in B\Rightarrow a+b\in B, a\cdot b\in B$**.**

Beispiel. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$ sind Ringe.

Die Menge $\{0\}$ ist ein Ring (der Nullring), wobei $0 = 1$.

Wenn A ein Ring ist, so ist $A[X] = \{\sum_{i=1}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in A\}$ ein Ring (der Ring der Polynome mit Koeffizienten aus A).

In einem Ring A betrachten wir die folgende Teilmenge:

$$A^* = \{a \in A \mid \exists b \in A, ab = 1\} = \text{"}\textit{Menge der Einheiten}\text{"}$$

$(A^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. (Aufgabe)

$$\mathrm{NT}(A) := \{a \in A \mid \exists b \in A \backslash \{0\}, ab = 0\} = \text{"}\textit{Menge der Nullteiler in } A\text{"}$$
$$\mathrm{NNT}(A) := A \backslash \mathrm{NT}(A) = \text{"}\textit{Menge der Nichtnullteiler in } A\text{"}$$
$$\mathrm{Nil}(A) := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n = 0\} = \text{"}\textit{Menge der nilpotenten Elementen in } A\text{"}$$

Definition. Ein Ring A heisst integer (oder auch Integritätsring oder auch nullteilerfrei), wenn $A \neq \{0\}$ und wenn $a, b \in A, ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$.

Ein Ring A ist ein Körper wenn $A \neq \{0\}$ und wenn jedes Element $a \in A \backslash \{0\}$ eine Einheit ist.

Bemerkung. Sei A ein Ring mit $0 \neq 1$.

(1) $\{0\} \subset \mathrm{Nil}(A) \subset \mathrm{NT}(A) \subset A \backslash A^* \subset A$
(2) $\{1\} \subset A^* \subset \mathrm{NNT}(A) \subset A \backslash \mathrm{Nil}(A) \subset A$

Bemerkung. Sei A ein Ring.

(1) A ist integer $\Leftrightarrow$ $[\mathrm{NT}(A) = \{0\} \neq A]$ $\Leftrightarrow$ $[\mathrm{NNT}(A) = A \backslash \{0\} \neq \emptyset]$.
(2) A ist ein Körper $\Leftrightarrow$ $A^* = A \backslash \{0\}$.
(3) A ist ein Körper $\Rightarrow$ A ist integer.

1.2. **Ringhomomorphismen und Ideale.**

Definition. Sei A ein Ring. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist eine Untermenge, so dass:

(1) $(\mathfrak{a}, +) \subset (A, +)$ ist eine Untergruppe;
(2) $\forall a \in \mathfrak{a}$, $b \in A$, $ab \in \mathfrak{a}$.

Beispiel. Alle Ideale von $A = \mathbb{Z}$ sind $m\mathbb{Z} = \{am \mid a \in \mathbb{Z}\}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ (Aufgabe).

Für jeden Ring A und jedes $x \in A$ ist $(x) = xA = \{xa \mid a \in A\}$ ein Ideal von A. Zum Beispiel sind $(0) = \{0\}$ und $(1) = A$ zwei Ideale.

Definition. Seien A, B zwei Ringe. Eine Abbildung $\varphi \colon A \to B$ heisst Ringhomomorphismus, wenn gilt:

$$\begin{array}{rcll} \varphi(0) & = & 0 & \\ \varphi(1) & = & 1 & \\ \varphi(a+b) & = & \varphi(a) + \varphi(b) & \text{für alle } a, b \in A. \\ \varphi(a \cdot b) & = & \varphi(a) \cdot \varphi(b) & \text{für alle } a, b \in A. \end{array}$$

Ein Ringhomomorphismus $\varphi \colon A \to B$ heisst Isomorphismus, wenn ein Ringhomomorphismus $\psi \colon B \to A$ existiert, so dass $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ die Identität sind (und wir sagen, dass A und B isomorph sind).

Lemma 1. *Sei $\varphi \colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen zwei Ringen.*

(1) *Die Menge*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\} \ (\textit{Kern von } \varphi)$$

ist ein Ideal von A.

(2) *Die Menge*

$$\mathrm{Bild}(\varphi) = \{\varphi(a) \mid a \in A\} \ (\textit{Bild von } \varphi)$$

ist ein Unterring von B aber im Allgemeinen kein Ideal von B.

Lemma 2. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen zwei Ringen.*

(1) *φ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.*

(2) *φ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $\Big[\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(\varphi) = B\Big]$.*

Definition. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. $A/\mathfrak{a}$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von Elementen aus A, wobei $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathfrak{a}$. Die Äquivalenzklasse von $a \in A$ wird durch $[a]$ geschrieben und Addition und Multiplikation auf $A/\mathfrak{a}$ sind durch $[a] + [b] = [a + b], [a] \cdot [b] = [a \cdot b]$ definiert.

Lemma 3. (1) *In Definition 1.2 sind Addition und Multiplikation wohldefiniert; $A/\mathfrak{a}$ ist ein Ring, wobei $0, 1 \in A/\mathfrak{a}$ die Äquivalenzklassen von $0, 1 \in A$ sind.*

(2) *Die Abbildung $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$, welche a auf $[a]$ sendet, ist ein surjektive Ringhomomorphismus mit Kern $\mathfrak{a}$. Diese Abbildung heisst kanonische Abbildung.*

Bemerkung. Manchmal definieren Leute $A/\mathfrak{a}$ als die Menge $\{x+\mathfrak{a} \mid x \in A\}$, wobei $x+\mathfrak{a} = \{x+a \mid a \in \mathfrak{a}\}$, und sagen, dass $(x + \mathfrak{a}) + (y + \mathfrak{a}) = x + y + \mathfrak{a}$, $(x + \mathfrak{a}) \cdot (y + \mathfrak{a}) = x \cdot y + \mathfrak{a}$. Beide Definitionen sind äquivalent.

Satz 4. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen zwei Ringen.*

(1) *Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. Es existiert ein eideutiger Ringhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon A/\mathfrak{a} \to B$, so dass das folgende Diagramm (in dem π die kanonische Abbildung ist) kommutiert*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & B \\ A/\mathfrak{a} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

(2) *φ induziert ein Isomorphismus*

$$\overline{\varphi}\colon A/\mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(\varphi).$$

Lemma 5. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen zwei Ringen.*

(1) *Für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset B$ ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal von A.*

(2) *Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist $\varphi(\mathfrak{a})$ eine Untergruppe von $(B, +)$ aber im Allgemeinen kein Ideal von B.*

(3) *Wenn φ bijektiv ist, ist $\varphi(\mathfrak{a})$ ein Ideal von B für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.*

Satz 6. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein* surjektiver *Ringhomomorphismus zwischen zwei Ringen. Es gibt eine bijektive Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c} \textit{Ideale von } A, \\ \textit{die } \mathrm{Ker}(\varphi) \textit{ enthalten} \end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} \textit{Ideale} \\ \textit{von } B \end{array}\right\} \\ \mathfrak{a} & \overset{\Phi}{\to} & \varphi(\mathfrak{a}) \\ \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) & \overset{\Psi}{\leftarrow} & \mathfrak{b} \end{array}$$

Folgerung 7. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Die kanonische Abbildung $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ induziert eine bijektive Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c} \textit{Ideale von } A, \\ \textit{die } \mathfrak{a} \textit{ enthalten} \end{array}\right\} & \longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} \textit{Ideale} \\ \textit{von } A/\mathfrak{a} \end{array}\right\} \\ \mathfrak{b} & \mapsto & \pi(\mathfrak{b}) \\ \pi^{-1}(\mathfrak{c}) & \leftarrow & \mathfrak{c} \end{array}$$

Lemma. *Sei A ein Ring, so dass $A \neq \{0\}$. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *A ist ein Körper;*

(2) *Die einzigen Ideale von A sind (0) und $(1) = A$.*

(3) *Jeder Ringhomomorphismus von A auf einen Nichtnullring B ist injektiv.*

1.3. Summe und Produkte von Idealen.

Definition. Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale von A. Man definiert
$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}$;
$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}, b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b}, n \in \mathbb{N}\}$.
$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in \mathfrak{a}\}$ (heisst Wurzel oder Radikal von $\mathfrak{a}$).
Diese Mengen sind Ideale von A (Aufgabe).

Lemma 8. *Sei A ein Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subset A$ drei Ideale. Dann gilt*

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}.$$

Definition. Sei A ein Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ zwei Ideale. Man sagt, dass $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ coprim sind, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$.

Bemerkung. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sind coprim $\Leftrightarrow \exists a \in A, b \in B$, so dass $a + b = 1$.

Lemma 9. *Sei A ein Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subset A$ drei Ideale. Dann gilt*

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \textit{ coprim } \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}.$$

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \textit{ coprim }, \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \textit{ coprim } \Rightarrow \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \textit{ coprim }.$$

Definition. Sei A ein Ring und sei I eine Indexmenge. Für jedes $i \in I$ sei $\mathfrak{a}_i$ ein Ideal von A (Achtung: I kann unendlich sein). Man definiert

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \left\{ \sum_{i \in I} a_i \;\middle|\; a_i \in \mathfrak{a}_i \forall i \in I \text{ und nur endlich viele der } a_i \text{ sind nicht null} \right\}.$$

Wenn I endlich ist, definiert man

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i \in I} a_{i,j} \right) \;\middle|\; a_{i,j} \in \mathfrak{a}_i \text{ für } i \in I, j = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wenn $a_1, \ldots, a_n$ Elemente von A sind, definiert man

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a_1) + \cdots + (a_n) \subset A.$$

Bemerkung. Alle diese Mengen sind Ideale.

Lemma 10. (1) $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ *ist das kleinste Ideal, das $\mathfrak{a}_i$ enthält für alle $i \in I$.*
(2) $(a_1, \ldots, a_n)$ *ist das kleinste Ideal, das $a_1, \ldots, a_n$ enthält.*

Lemma 11. *Sei A ein Ring und seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \subset A$ Ideale, die paarweise coprim sind. Es gilt:*

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i.$$

1.4. Produkte von Ringen und Chinesischer Restsatz.

Definition. Sind $A_1, \ldots, A_n$ Ringe, so definiert man das direkte Produkt $\prod_{i=1}^{n} A_i$ als

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Durch

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n)$$

wird $\prod_{i=1}^{n} A_i$ zu einem Ring mit Nullelement und Einselement $(0, \ldots, 0)$ und $(1, \ldots, 1)$.

Bemerkung.
(1) $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ist nicht ein Produkt von Idealen, obwohl wir die gleiche Notation benützen.

(2) Wenn $n > 1$, ist $\prod_{i=1}^n A_i$ nicht integer: $(0,1,0,\dots,0)\cdot(1,0,\dots,0) = (0,\dots,0)$.
(3) Für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ ist die Projektion

$$p_i\colon \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^n A_i & \to & A_i \\ (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & a_i \end{array}$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus.
Die Einbettung

$$\iota_i\colon \begin{array}{ccc} A_i & \to & \prod_{i=1}^n A_i \\ a_i & \mapsto & (0,\dots,0,a_i,0,\dots,0) \end{array}$$

ist aber kein Ringhomomorphismus, weil $\iota_i(1) = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) \neq 1$.

Satz 12. (Chinesischer Restsatz)
Sei A ein Ring, seien $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n \subset A$ Ideale und sei $\varphi\colon A \to \prod_{i=1}^n (A/\mathfrak{a}_i)$ der Ringhomomorphismus, welcher durch

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} A & \to & \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i \\ a & \mapsto & ([a],\dots,[a]). \end{array}$$

definiert ist.

(1) *φ injektiv $\Leftrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \{0\}$.*
(2) *φ surjektiv $\Leftrightarrow \mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ sind paarweise coprim.*
(3) *Falls $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n$ paarweise coprim sind, induziert φ einen Isomorphismus*

$$A/_{\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i} = A/_{\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i} \to \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i.$$

1.5. Primideale und Maximalideale.

Definition. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal in einem Ring A.

(1) Das Ideal $\mathfrak{a}$ heisst Primideal, wenn $\mathfrak{a} \neq A$ und wenn gilt:

$$\forall a,b \in A, ab \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a} \text{ oder } b \in \mathfrak{a}.$$

(2) Das Ideal $\mathfrak{a}$ heisst maximal, wenn $\mathfrak{a} \neq A$ und wenn gilt:

$$\text{es gibt kein Ideal } \mathfrak{b} \subset A, \text{ so dass } \mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq A.$$

Satz 13. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal.*

$$\mathfrak{a} \text{ ist prim} \Leftrightarrow A/\mathfrak{a} \text{ ist integer.}$$
$$\mathfrak{a} \text{ ist maximal} \Leftrightarrow A/\mathfrak{a} \text{ ist ein Körper.}$$

Folgerung 14. *Ein maximal Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist ein Primideal.*

Definition. Sei A ein Ring. Eine Menge $S \subset A$ heisst multiplikativ, wenn $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$.

Bemerkung. Für jedes $a \in A$ ist $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{a^i\}$ eine multiplikative Menge.

Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ hat man

$$\mathfrak{a} \text{ ist prim} \Leftrightarrow A\backslash\mathfrak{a} \text{ ist multiplikativ.}$$

Lemma 15. *Sei $A \neq \{0\}$ ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal und $S \subset A$ eine multiplikative Menge mit $\mathfrak{a} \cap S = \emptyset$.*
Die Menge $M = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subsetneq A \text{ ist ein Ideal}, \mathfrak{b} \cap S = \emptyset\}$ enthält ein Maximalelement $\mathfrak{p}$. Jedes solche $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal von A und $\mathfrak{p}$ ist ein Maximalideal, wenn $S = \{1\}$.

Folgerung 16. *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ist in einem Maximalideal enthalten.*

Folgerung 17. *Jeder Ring $A \neq \{0\}$ enthält ein Maximalideal.*

Folgerung 18. *Jedes Element $a \in A$, das nicht invertierbar ist, ist in einem Maximalideal enthalten.*

Lemma 19. *Sei A ein Ring. Man hat* $A^* = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{m} \subset A, \mathfrak{m} \, maximal} \mathfrak{m}$.

Lemma 20. *Sei A ein Ring.*

(1) $\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset A, \mathfrak{p} \, Primideal} \mathfrak{p}$.

(2) *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A gilt* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \subset A, \mathfrak{p} \, Primideal} \mathfrak{p}$.

Folgerung 21. *Sei A ein Ring.* $\mathrm{Nil}(A)$ *ist ein Ideal, und* $A/\mathrm{Nil}(A)$ *hat keine nilpotenten Elemente.*

Folgerung 22. *Sei $A \neq \{0\}$ ein Ring und* $\mathrm{NT}(A)$ *die Menge der Nullteiler. Diese Menge ist eine Vereinigung von gewissen Primidealen.*

Lemma 23. *Sei $A \neq \{0\}$ ein Ring. Die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ enthält ein Minimalelement.*

Satz 24. *Sei A ein Ring.*

(1) *Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ Primideale von A und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal.*
Wenn $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, *existiert ein i, so dass $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$.*

(2) *Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale von A und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal.*
Wenn $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$, *existiert ein i, so dass $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$.*

(3) *Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale von A und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal.*
Wenn $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$, *existiert ein i, so dass $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p}$.*

Definition. Sei A ein Ring. Das Jacobson-Radikal $\mathrm{Jac}(A)$ ist der Durchschnitt aller maximalen Ideale von A.

Lemma 25. *Sei A ein Ring und $x \in A$.*

$$x \in \mathrm{Jac}(A) \Leftrightarrow 1 - xy \in A^* \ \forall y \in A.$$

2. Bruchringe

2.1. Definition und universelle Eigenschaft.

Definition. Sei A ein Ring und $S \subset A$ eine multiplikative Menge.

Auf der Menge $A \times S$ betrachten wir eine Äquivalenzrelation:

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S \text{ mit } t(as' - a's) = 0.$$

Wir definieren $S^{-1}A$ als die Menge der Äquivalenzklassen. Man hat $(a, s) = (as', ss')$ für jedes $s' \in S$.

Die Menge $S^{-1}A$ ist ein Ring (Aufgabe) durch:

$$(a, s) + (a', s') = (as' + a's, ss')$$
$$(a, s) \cdot (a', s') = (aa', ss')$$

Die Äquivalenzklasse von (a, b) wird oft als $\frac{a}{b}$ geschrieben.

Bemerkung. Wenn A integer ist, hat man $(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow as' = a's$, wie im Quotientenkörper. Im Allgemeinen definiert aber diese Regel keine Äquivalenzrelation!

In $S^{-1}A$ sind das Einselement und Nullelement (s, s) und $(0, s)$, $s \in S$ (Diese Elementen sind unabhängig von der Wahl von $s \in S$).

Definition. Man definiert ein Ringhomomorphismus $\iota_{A,S} \colon A \to S^{-1}A$ via $a \mapsto (as, s)$, $s \in S$. (Die Äquivalenzklasse von (as, s) ist unabhängig von der Wahl von $s \in S$).

Bemerkung. $\iota_{A,S}(S) \subset (S^{-1}A)^*$, weil $\iota_{A,S}(s) \cdot (1, s) = (ss', s') \cdot (1, s) = (ss', ss') \sim (1, 1)$.

Lemma 26. *Sei A ein Ring und S eine multiplikative Menge. Die Menge $S' = S \cup \{1\}$ ist auch multiplikativ, und man hat einen kanonischen Isomorphismus $S^{-1}A \to S'^{-1}A$ via $(a, s) \mapsto (a, s)$.*

Aus Lemma 26 folgt: man kann immer eine multiplikative Menge S mit $1 \in S$ nehmen. Dann kann man $\iota_{A,B} \colon A \to S^{-1}A$ durch $a \mapsto (a,1)$ definieren. Dies Abbildung ist ein Ringhomomorphismus, aber im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

Lemma 27. *Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge.*

$$S^{-1}A = \{0\} \Leftrightarrow 0 \in S$$

Lemma 28. *Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge.*

Der Ringhomomorphismus $\iota_{A,S} \colon A \to S^{-1}A$ ist genau dann injektiv, wenn S keinen Nullteiler enthält.

Folgerung 29. *Sei A ein Ring und $S \subset A^*$ ein multiplikative Menge. Die Abbildung $\iota_{A,S} \colon A \to S^{-1}A$ ist ein Isomorphismus.*

Satz 30. *Sei $\varphi \colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen zwei Ringen, und sei $S \subset A$ eine multiplikative Menge mit $\varphi(S) \subset B^*$.*

Es existiert ein eideutiger Ringhomomorphismus $\psi \colon S^{-1}A \to B$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_{A,S}"] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Folgerung 31. *Sei A ein Ring und $S, T \subset A$ zwei multiplikative Menge mit $S \subset T$. Es gibt einen kanonischen Ringhomomorphismus $\iota_{S,T} \colon S^{-1}A \to T^{-1}A$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_{A,T}"] \arrow[d, "\iota_{A,S}"] & T^{-1}A . \\ S^{-1}A \arrow[ur, "\iota_{S,T}"'] & \end{tikzcd}$$

Wenn T kein Nullteiler enthält, ist der Homomorphismus $\iota_{S,T}$ is injektiv.

Folgerung 32. *Sei A ein Integritätsring und $S \subset A$ ein multiplikative Menge mit $0 \notin S$. Die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A & \to & Q(A) = (A \backslash \{0\})^{-1}A \\ \frac{a}{s} & \mapsto & \frac{a}{s} \end{array}$$

ist injektiv. Das Ring $S^{-1}A$ ist dann auf kanonische Weise ein Unterring des Quotientkörpers $Q(A)$.

Definition. Ein Ring A heisst lokaler Ring (oder auch Stellenring) wenn er nur ein Maximalideal enthält.

Lemma 33. *Sei A ein Ring. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *A ist ein lokale Ring.*
(2) *A ist ein lokale Ring und sein Maximalideal ist $A \backslash A^*$.*
(3) *Die Menge $A \backslash A^*$ ist ein Ideal von A.*

2.2. **Idealstruktur in Bruchringen.** Wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal von ein Ring A ist, schreibt man $A_{\mathfrak{p}} = (A \backslash \mathfrak{p})^{-1}A$. Wir sehen jetzt, dass es ein lokaler Ring ist.

Satz 34. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt:*

$$A_{\mathfrak{p}} \text{ ist lokal mit dem Maximalideal } \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \{\tfrac{p}{s} \mid p \in \mathfrak{p}, s \in A \backslash \mathfrak{p}\}.$$

Bemerkung. $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ ist das Ideal erzeugt von $\iota_{A,\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})$ (wo $\iota_{A,\mathfrak{p}} = \iota_{A,A\backslash\mathfrak{p}}$).

Beispiel. $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (p)$, wo p ein Primzahl ist.
$A_{\mathfrak{p}} = A_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$

Definition. Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Man schreibt

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \left\{ \frac{a}{s} \;\middle|\; a \in \mathfrak{a}, s \in S \right\} \subset S^{-1}A.$$

Beispiel. Sei $A = \mathbb{Z}$, $S = A \backslash 2\mathbb{Z}$.
$S^{-1}(2\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{2a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b \right\} = S^{-1}(6\mathbb{Z}) = S^{-1}(10\mathbb{Z}) \neq S^{-1}(8\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{8a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b \right\}$

Man sieht, dass die Inklusion $\mathfrak{a} \subset \iota_{A,S}^{-1}(S^{-1}\mathfrak{a})$ strikt sein kann. Aber nicht wenn $\mathfrak{a}$ prim ist, wie wir in dem nächsten Satz sehen.

Satz 35. *Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge.*

1. *Für jede Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist $S^{-1}\mathfrak{a}$ ein Ideal von $S^{-1}A$.*
   $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.
2. *Für jede Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$, ist $\mathfrak{a} = \iota_{A,S}^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Ideal von A, mit $S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.*
3. *Für jede Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, ist $S^{-1}\mathfrak{p}$ prim und $\iota_{A,S}^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$.*
4. *Jede Primideal von $S^{-1}A$ ist gleich $S^{-1}\mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A ist, mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.*

Folgerung 36. *Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge. Der Ringhomomorphismus $\iota_{A,S} \colon A \to S^{-1}A$ induziert eine bijektive Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Primideale von } A, \\ \text{die mit } S \text{ leere Durschnitt haben} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Primdeale} \\ \text{von } S^{-1}A \end{array} \right\} \\ \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} \\ \iota_{A,S}^{-1}(\mathfrak{b}) & \leftarrow & \mathfrak{b} \end{array}$$

Bemerkung. Wir sehen nochmals, dass $A_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring ist, wenn $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal ist.

Folgerung 37. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \subset A_{\mathfrak{p}}$ ein minimales Primideal. Es folgt:*

1. *$\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ ist das einzige Primideal von $A_{\mathfrak{p}}$ und $\mathrm{Nil}(A_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}A_p$;*
2. *Jede Element von $\mathfrak{p}$ ist ein Nullteiler.*

Definition. Ein Ring A heisst reduziert wenn $\mathrm{Nil}(A) = \{0\}$.

Folgerung 38. *Für einen reduzierten Ring A gilt*

$$\mathrm{NT}(A) = \bigcup_{\mathfrak{p} \subset A \text{ minimales Primideal}} \mathfrak{p}$$

.

Definition. Ein Ring A heisst Hauptidealring wenn jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von A ist gleich $(a) = aA$ für ein $a \in A$.

A Euklidisch $\Rightarrow$ A Hauptidealring $\Rightarrow$ A faktorieller Ring $\Rightarrow$ A integer.

Satz 39. *Sei A ein Hauptidealring. Dann gilt:*

1. *Für jede multiplikative Menge S mit $0 \notin S$, ist $S^{-1}A$ ein Hauptidealring.*
2. *Wenn p ein Primelement in A ist und $\mathfrak{p} = (p)$, ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein Hauptidealring mit zwei Primidealen: $\{0\}$ und $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Es gibt dann nur ein Primelement in $A_{\mathfrak{p}}$ (bis auf Assoziertheit).*

Satz 40. *Sei A ein Ring und $S \subset A$ eine multiplikative Menge.*

1. *Für jede Ringhomomorphismus $\varphi \colon A \to B$ ist $\varphi(S) \subset B$ eine multiplikative Menge.*
2. *Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $\pi \colon A \to A/\mathfrak{a}$ die kanonische Abbildung. Dann gilt eine kanonische Isomorphismus*
$$(S^{-1}A)/(S^{-1}\mathfrak{a}) \cong \pi(S)^{-1}(A/\mathfrak{a}).$$

Folgerung 41. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Man hat $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong Q(A/\mathfrak{p})$.*

3. Moduln

3.1. Definitionen, grundlegende Eigenschaften.

Definition. Sei A ein Ring. Ein A-Modul ist eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe, auf der A linear operiert. Diese Operation schreibt man wie Multiplikation.

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \to & M \\ (a, m) & \mapsto & am \end{array}$$

Wenn man sagt, dass die Operation linear ist, sagt man, dass

- $a(m_1 + m_2) = am_1 + m_2$
- $(a_1 + a_2)m = a_1 m + a_2 m$
- $a_1(a_2 m) = (a_1 a_2)m$
- $1m = m$

für alle $a, a_1, a_2 \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$.

Lemma 42. *Sei A ein Ring und M ein A-Modul.*

Für jede $a \in A$, $m \in M$, hat man $0_A m = 0_M$, $a 0_M = 0_M$, $(-1)m = -m$ wo 0_A, 0_M die Nullelementen von A und M sind.

Bemerkung. Ein Stuktur von A-Modul auf eine abelsche Gruppe M ist äquivalent zu eine Ringhomomorphismus $A \to \operatorname{End}(M)$, wo $\operatorname{End}(M)$ der (vielleicht nicht kommutativ) Ring von Endomorphismus von M ist.

Bemerkung. Wenn A ein Körper ist, ein A-Modul ist gleich als ein A-Vektorraum.

Wenn $A = \mathbb{Z}$, es gibt nur eine Struktur von A-Modul auf jeden abelsche Gruppe M, die ist $am = \underbrace{m + \cdots + m}_{a \text{ mal}}$ und $(-a)m = -(am)$ für $a \in \mathbb{N}$. Die Kategorien von $\mathbb{Z}$-Moduln oder abelsche Gruppen sind dann gleich.

Beispiel. Sei A ein Ring.

(1) Jede Ideal $\mathfrak{a}$ ist ein A-Modul.
(2) Jede Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ gibt ein A-Modul Struktur zu B, via $ab = \varphi(a)b$ für $a \in A, b \in B$.
    Es gibt auch ein A-Modul Struktur zu jede B-Modul M, via $am = \varphi(a)m$ für $a \in A$, $m \in M$.

Definition. Sei A ein Ring und M ein A-Modul.

Die Menge $\operatorname{Ann}_A(M) = \{a \in A \mid am = 0\ \forall m \in M\}$ heisst der Annulator von M.

Für ein $m \in M$ heisst $\operatorname{Ann}_A(m) = \{a \in A \mid am = 0\}$ heisst der Annulator von m.

Wenn A implizit ist, schreibt man oft $\operatorname{Ann}(M)$ und $\operatorname{Ann}(m)$ für $\operatorname{Ann}_A(M)$ und $\operatorname{Ann}_A(m)$.

Lemma 43. *Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $m \in M$.*

(1) *Die Mengen $\operatorname{Ann}(M)$ und $\operatorname{Ann}(m)$ sind Idealen von A.*
(2) *Wenn $\mathfrak{a} \subset A$ ist ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Ann}(M)$, ist M ein $A/\mathfrak{a}$-Modul, via $[a]m = am$.*

Definition. Sei A ein Ring und M_1, M_2 zwei A-Moduln. Ein A-Modulhomomorphismus $\varphi\colon M_1 \to M_2$ ist eine Abbildung, so dass

$$\varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$$
$$\varphi(am) = a\varphi(m)$$

für jede $a \in A, m, m_1, m_2 \in M$.

Es ist ein Isomorphismus wenn existiert ein A-Modulhomomorphismus $\psi\colon M_1 \to M_2$, so dass $\psi\varphi$ und $\varphi\psi$ die Identitäten sind.

Man definiert $\operatorname{Hom}(M_1, M_2)$ als die Menge von allen A-Modulhomomorphismus von M_1 nach M_2.

Lemma 44. *Die Menge* $\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ *ist ein* A*-Modul, via* $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x)$ *und* $(a\varphi)(x) = a\varphi(x)$ *für jede* $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$*, jede* $a \in A$ *und jede* $x \in M_1$*.*

Definition. Sei A ein Ring und $M_1, \dots, M_n$ A-Moduln, so ist

$$M_1 \times M_2 \times \dots M_n = \{(m_1, \dots, m_n) \mid m_i \in M_i\}$$

ein A-Modul, wobei $(m_1, \dots, m_n)+(m_1', \dots, m_n') = (m_1+m_1', \dots, m_n+m_n')$ und $a(m_1, \dots, m_n) = (am_1, \dots, am_n)$.

Definition. Sei M ein A-Modul. Ein Untermodul $N \subset M$ ist eine Untergruppe von N, die abgeschlossen unter der Multiplikation mit Elementen aus A ist. Die abelsche Faktorgruppe M/N trägt vermöge $a[m] = [am]$ eine A-Modulstruktur. Mit dieser heisst sie Faktormodul.

Die kanonische Abbildung $M \to M/N$ ist ein A-Modulhomomorphism (oder A-linear), der surjektiv ist.

Bemerkung. Sei M ein A-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Die kanonische Abbildung $\pi\colon M \to M/N$ induziert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Untermoduln von } M, \\ \text{die } N \text{ enthalten} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Untermoduln} \\ \text{von } M/N \end{array} \right\} \\ E & \mapsto & \pi(E) \\ \pi^{-1}(F) & \leftarrow & F \end{array}$$

Bemerkung. Sei $\varphi\colon M \to N$ ein A-Modulhomomorphism, so ist der Kern $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\}$ ein Untermodul von M, und $\mathrm{Bild}(\varphi) = \varphi(M)$, das Bild von φ, ein Untermodul von N.

Der Cokern $\mathrm{Coker}(\varphi) = N/\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist ein Faktormodul von N.

Satz 45. *Sei* $\varphi\colon M \to N$ *ein* A*-Modulhomomorphism,* $M' \subset M$ *ein* A*-Untermodul, so dass* $M' \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$

(1) *Es existiert ein eideutiger Ringhomomorphismus* $\overline{\varphi}\colon M/M' \to N$*, so dass das folgende Diagramm (in dem* π *die kanonische Abbildung ist) kommutiert*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & N \\ M/M' \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

(2) $\mathrm{Ker}(\overline{\varphi}) = \mathrm{Ker}(\varphi)/M'$.

(3) φ *induziert ein Isomorphismus*

$$\overline{\varphi}\colon M/\mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(\varphi).$$

Definition. Sei I ein Indexmenge (z.B. $I = \{1, \dots, n\}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$,...). Man definiert $A^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} A$ als die Menge aller Abbildungen $f\colon I \to A$ mit $f(i) = 0$ für fast alle i (d.h. $f(i) \neq 0$ für nur endlichen i). Es ist ein A-Modul, via $(af)(i) = a \cdot f(i)$ und $(f+g)(i) = f(i)+g(i)$.

Moduln dieser Gestalt heissen frei.

Wenn $I = \{1, \dots, n\}$, ist $A^{(I)} = \prod_{i=1}^{n} A = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ mal}}$ die Menge aller n-tupel von Elementen aus A.

Definition. Sei A ein Ring, und M_i, $i \in I$ Moduln (wo I ein Indexmenge ist). Man definiert

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_i \mid m_i \in M_i, \text{ fast alle } m_i \text{ sind null}\}.$$

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i)_i \mid m_i \in M_i\}.$$

Beide sind A-Moduln, durch $(m_i)_{i\in I} + (n_i)_{i\in I} = (m_i + n_i)_{i\in I}$ und $a(m_i)_{i\in I} = (am_i)_{i\in I}$. Man nennt $\bigoplus_{i\in I} M_i$ die direkte Summe der M_i und $\prod_{i\in I} M_i$ das direkte Produkt. Beide sind gleich wenn I endlich ist, aber nicht wenn I unendlich ist. $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ist immer ein Untermodul von $\prod_{i\in I} M_i$.

Gilt $M_i = A$ für alle $i \in I$, so ist $\bigoplus_{i\in I} M_i = A^{(I)}$.

Definition. Sei M ein A-Modul und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M. Man definiert

$$\sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{i\in I} m_i \ \mid m_i \in M_i, \text{ mit } m_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}.$$

Es ist der kleinste Untermodul von M, der alle M_i enthält.

Der Durschnitt $\bigcap_{i\in I} M_i$ ist auch ein Untermodul von M. Es ist der grösste, der in alle M_i enthalten ist.

Bemerkung. Für jedes $j \in I$ kann man M_j auf naheliegende Weise als Untermodul von $\bigoplus_{i\in I} M_i$ auffassen, indem man $x \in M_j$ mit der Familie $(m_i)_{i\in I}$ identifiziert, die durch $m_j = x$ und $m_i = 0$ für $i \neq j$ definiert ist.

Bei dieser Identifikation gilt $\sum_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i$ und $M_j \cap \left(\sum_{i\in I\setminus\{j\}} M_i \right) = \{0\}$ für jedes $j \in I$. Wir haben umgekehrt das folgende Lemma.

Lemma 46. *Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln von M, so dass*

$$\sum_{i\in I} M_i = M \text{ und } M_j \cap \left(\sum_{i\in I\setminus\{j\}} M_i \right) = \{0\} \text{ für jedes } j \in I.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon \bigoplus_{i\in I} M_i &\to M \\ (m_i)_{i\in I} &\mapsto \sum_{i\in I} m_i \end{aligned}$$

ist ein A-Modulisomorphismus.

Satz 47. *Sei M ein A-Modul und $M_1, M_2 \subset M$ Untermoduln.*

(1) *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus $(M_1 + M_2)/M_1 \to M_2/(M_1 \cap M_2)$ (Noetherscher Isomorphiesatz)*
(2) *Wenn $M_2 \subset M_1$, gibt es einen kanonischen Isomorphismus $(M/M_2)/(M_1/M_2) \to M/M_1$.*

Definition. Sei M ein A-Modul und $m \in M$. Die Menge $Am = \{am \mid a \in A\}$ ist ein Untermodul von M. Solchen Moduln heissen monogen.

Lemma 48. *Sei M ein A-Modul. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(1) *M ist monogen;*
(2) *$M \cong A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.*
(3) *$M \cong A/\mathrm{Ann}(m)$ für ein Element $m \in M$.*

Definition. Sei M ein A-Modul.

(1) Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in M$ heisst ein Erzeugendensystem von M, wenn $M = \sum_{i\in I} Ax_i$ gilt.
(2) Ein Erzeugendensystem $(x_i)_{i\in I}$ von M ist eine Basis, wenn folgendes gilt:

$$\sum_{i\in I} a_i x_i = 0 \text{ (mit nur endlichen nicht null } x_i) \Rightarrow a_i = 0 \text{ für jede } i$$

(3) Man sagt, dass M ein endlicher (auch endlich erzeugter) A-Modul ist, wenn M ein endlich Erzeudendensystem besitzt.

Lemma 49. *Ein A-Modul M ist genau dann frei, wenn er eine Basis besitzt.*

Definition. Sei A ein Ring. Der Rang eines endlichen freien A-Modul M ist der Zahl n, so dass $M \cong A^n$.

Beispiel. Sei A ein Ring. Für jede $n > 0$ ist A^n ein freier A-Modul, mit Basis $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, \ldots, 0, 1)$.

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul, aber ist ein freier $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Modul.

$\mathbb{Q}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul. Für jeden $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$, mit $n > 1$ gibt es $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ nicht alle null, so dass $\sum a_i q_i = 0$.

Lemma 50. *Sei M ein A-Modul.*

(1) *Die Moduln* $\mathrm{Hom}(A, M)$ *und M sind isomorph.*
(2) *Sei F ein freier A-Modul, $B \subset F$ eine Basis.*
  (a) *Für jede Abbildung $f\colon B \to M$ gibt es ein eindeutiger A-Modulhomomorphismus $\varphi\colon F \to M$, so dass $f = \varphi|_B$.*
  (b) *Die Menge von aller Abbildungen $B \to M$ ist bijektiv zu* $\mathrm{Hom}(F, M)$.

Lemma 51. *Sei A ein Ring, und $\varphi\colon M_1 \to M_2$ ein A-Modulhomomorphism.*
Für jede A-Modul N, hat man kanonischen A-Modulhomomorphismen

(1) $\varphi_*\colon \mathrm{Hom}(N, M_1) \to \mathrm{Hom}(N, M_2)$, *durch $\varphi_*(\psi) = \varphi \circ \psi$ definiert.*
(2) $\varphi^*\colon \mathrm{Hom}(M_2, N) \to \mathrm{Hom}(M_1, N)$, *durch $\varphi^*(\psi) = \psi \circ \varphi$ definiert.*

Satz 52. *Sei A ein Ring und M ein A-Modul.*

(1) *M ist ein Faktormodul eines freien Moduls.*
(2) *M ist ein endlicher A-Modul $\Leftrightarrow M \cong A^n/N$, für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Untermodul N von A^n.*
(3) *Jeder Faktormodul eines endlichen Moduls ist endlich.*
(4) *Sei N ein Untermodul von M. Wenn M/N und N endlich sind, so ist auch M endlich.*

Lemma 53. *Seien $\varphi\colon M \to N$ und $\psi\colon N \to M$ Modulhomomorphismen mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_N$.*
φ ist surjektiv, ψ ist injektiv, und $M \cong \psi(N) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) \cong N \oplus \mathrm{Ker}(\varphi)$

Satz 54. (*Verallgemeinerung von Lemma* 50) *Sei A ein Ring und sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln. Für jede $j \in I$ definieren wir ein surjektive A-Modulhomomorphismus $\pi_j\colon \bigoplus_{i \in I} M_i \to M_j$ durch $\pi_j((m_i)_{i \in I}) = m_j$.*

(1) *Zu A-Modulhomomorphismen $\varphi_i\colon M_i \to N$ $(i \in I)$ gibt es genau ein A-Modulhomomorphism $\varphi\colon \bigoplus_{i \in I} M_i \to N$ mit $\varphi|_{M_i} = \varphi_i$.*
(2) *Es gibt dann ein A-Modulisomorphismus* $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i \in I} M_i, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(M_i, N)$.
(3) *Zu A-Modulhomomorphismen $\varphi_i\colon N \to M_i$, so dass $\forall n \in N, \varphi_i(n) = 0$ für fast alle i, gibt es genau ein A-Modulhomomorphism $\varphi\colon N \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ mit $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$.*
(4) *Es gibt eine injektive A-Modulhomomorphism* $\Psi\colon \mathrm{Hom}(N, \bigoplus_{i \in I} M_i) \to \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(N, M_i)$, *der sendet φ auf $(\pi_i \circ \varphi)_{i \in I}$.* $\mathrm{Bild}(\Psi)$ *ist dann die Menge von $(\varphi_i)_{i \in I}$, so dass $\forall n \in N, \varphi_i(n) = 0$ für fast alle i.*

3.2. **Moduln über Hauptidealringen.**

Satz 55. *Sei A ein* **Hauptidealring** *und sei M ein endlicher A-Modul, erzeugt von $m_1, \ldots, m_k$.*
Für jede Untermodul N von M gibt es ein Erzeugendensystem $n_1, \ldots, n_k$ (einigen können null sein), so dass

$$n_i = \sum_{j \leq i} a_{i,j} m_j, \quad a_{i,j} \in A$$

und so dass $a_{i,i} = 0 \Rightarrow n_i$.

Folgerung 56. *Sei A ein Hauptidealring. Jede Untermodul von ein endlicher A-Modul ist auch endlich, erzeugt von ein kleiner Zahl von Elementen.*

Folgerung 57. *Sei A ein Hauptidealring. Jede Untermodul von ein endlicher freier A-Modul ist auch endlich und frei, mit kleinem Rang.*

Beispiel. Satz 55 und die Folgerungen sind falsch wenn A kein Hauptidealring ist.

Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, das kein Hauptideal ist. Wir nehmen $M = A$ und $N = \mathfrak{a} \subset M$. $M = A \cdot 1$ ist erzeugt von ein Element, aber N kann nicht erzeugt von 1 Element sein.

Es ist möglich, dass N endlich erzeugt ist, aber nicht immer.

3.3. **Satz von Cayley-Hamilton und Lemma von Nakayama.**

Definition. Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ und M ein A-Modul. Man schreibt $\mathfrak{a}M$ für das Untermodul von M erzeugt von allen am mit $a \in \mathfrak{a}$ und $m \in M$.

Satz 58 (Satz von Cayley-Hamilton)**.** *Sei M ein endlicher A-Modul, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $\psi\colon M \to M$ ein A-Modulhomomorphism, so dass $\psi(M) \subset \mathfrak{a}M$. Es existiert dann $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}$, so dass*

$$\psi^n + a_1\psi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\psi + a_n = 0$$

(Hier $\psi^n = \psi \circ \psi^{n-1}$ für $n > 1$)

Folgerung 59. *Sei A ein Ring, M ein endlicher A-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, so dass $\mathfrak{a}M = M$. Es existiert $x \in A$, so dass $[x] = [1]$ in $A/\mathfrak{a}$ und $xM = 0$.*

Folgerung 60 (Lemma von Nakayama)**.** *Sei A ein Ring. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ sind äquivalent*

(1) $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Jac}(A)$
(2) *Für jeden endlichen A-Modul M, $\mathfrak{a}M = M \Rightarrow M = 0$.*

Folgerung 61. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A mit $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Jac}(A)$ und M ein A-Modul. Wenn $N \subset M$ ist ein Untermodul, so dass M/N endlich ist (z.B. wenn M endlich ist) und*

$$M = \mathfrak{a}M + N,$$

hat man $M = N$.

Bemerkung. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Jeder A-Modulhomomorphism $\varphi\colon M \to N$ induziert ein A-Modulhomomorphism $\overline{\varphi}\colon M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$, der sendet $[m]$ auf $[\varphi(m)]$:

Man hat ein A-Modulhomomorphism $M \to N \to N/\mathfrak{a}N$, der sendet $\mathfrak{a}M$ auf $\{0\}$. Es induziert dann ein A-Modulhomomorphism $M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ (Satz 45).

Folgerung 62. *Sei A ein Ring und $\varphi\colon M \to N$ ein A-Modulhomomorphism.*

Wenn existiert ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Jac}(A)$ so dass, die induzierte A-Modulhomomorphism $\overline{\varphi}\colon M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ surjektiv ist, ist φ auch surjektiv.

Sei A ein lokal Ring, mit Maximalideal $\mathfrak{m}$, und $k = A/\mathfrak{m}$. Für jeden A-Modul M ist $\mathfrak{m} \subset \mathrm{Ann}(M/\mathfrak{m}M)$. Der A-Modul $M/\mathfrak{m}M$ ist dann auch ein $A/\mathfrak{m}$-Modul, d.h. ein k-Vektorraum. Es ist auch von endlicher Dimension, wenn M ein endlicher A-Modul ist (wenn $m_1, \dots, m_n$ ein Erzeugendensystem von M ist, ist $[m_1], \dots, [m_n]$ ein Erzeugendensystem vom A-Modul $M/\mathfrak{m}M$, also vom k-Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$). Wir haben umgehkert die folgenden Behauptung:

Lemma 63. *Sei A ein lokaler Ring, mit Maximalideal $\mathfrak{m}$, und M ein A-Modul. Seien $m_1, \dots, m_n$ Elementen von M, so dass $[m_1], \dots, [m_n]$ ein Basis vom $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$ ist. Es folgt*

$$M = m_1A + m_2A + \cdots + m_nA.$$

3.4. **Exakten Folgen.**

Definition. Sei
$$\dots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{\varphi_{n+2}} \dots$$
eine (endliche oder unendliche) Folge (oder Sequenz) von A-Modulhomomorphismen. Sie heisst exakt, wenn $\mathrm{Bild}(\varphi_n) = \mathrm{Ker}(\varphi_{n+1})$ für alle (vorkommenden) n ist.

Bemerkung. In Folgen schreibt man 0 für den Nullring $\{0\}$.

(1) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$ ist exakt $\Leftrightarrow$ φ ist injektiv.
(2) $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ ist exakt $\Leftrightarrow$ φ ist surjektiv.
(3) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ ist exakt $\Leftrightarrow$ φ ist ein Isomorphismus.
(4) $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$ ist exakt $\Leftrightarrow$ φ ist injektiv, ψ ist surjketiv und ψ induziert einen Isomorphismus von $M/\varphi(M')$ mit M''.

Definition. Eine exakte Sequenz der Form
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$
heisst kurze exakte Sequenz.

Bemerkung. Jede lange exakte Folge kann man in kurze exakte Folgen zerlegen.
Sei
$$\dots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{\varphi_{n+2}} \dots$$
eine exakte Folge, und sei $N_n = \mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Bild}(\varphi_{n-1}) \subset M_n$.
Dann gibt es kurze exakte Sequenzen
$$0 \longrightarrow N_n \xrightarrow{\mathrm{id}} M_n \xrightarrow{\varphi_n} N_{n+1} \longrightarrow 0.$$
Man bemerkt auch, dass $N_n \cong \mathrm{Coker}(\varphi_{n-2})$, weil $N_n = \mathrm{Bild}(\varphi_{n-1}) \cong M_{n-1}/\mathrm{Ker}(\varphi_{n-1}) = M_{n-1}/\mathrm{Bild}(\varphi_{n-2}) = \mathrm{Coker}(\varphi_{n-2})$.

Bemerkung. Für jede A-Modulhomomorphismus $\varphi\colon M \to N$ gibt es eine exakte Folge
$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Lemma 64. *Sei A ein Ring, und $\varphi\colon M' \to M$, $\psi\colon M \to M''$ zwei A-Modulhomomorphismen. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *Die Folge*
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$$
ist exakt.
(2) *Für jede A-Modul N ist die induzierte Folge*
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N, M') \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}(N, M) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}(N, M'')$$
exakt.

Bemerkung. Man sagt, dass der Funktor $\mathrm{Hom}(N, \cdot)$ linksexakt ist. In allgemeinen ψ surjektiv impliziert nicht, dass ψ_* surjektiv ist (Aufgabe).

Lemma 65. *Sei A ein Ring, und $\varphi\colon M' \to M$, $\psi\colon M \to M''$ zwei A-Modulhomomorphismen. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *Die Folge*
$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$
ist exakt.

(2) *Für jede A-Modul N ist die induzierte Folge*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}(M, N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(M', N)$$

exakt.

Bemerkung. Man sagt, dass der Funktor $\mathrm{Hom}(\cdot, N)$ linksexakt ist. In allgemeinen φ injektiv impliziert nicht, dass φ^* injektiv ist (Aufgabe).

Definition. Sei $\varphi\colon M \to N$ ein A-Modulhomomorphism. Ein A-Modulhomomorphism $\psi\colon N \to M$ ist ein Schnitt von φ wenn $\varphi \circ \psi = \mathrm{im}_N$ und ist ein Retraktion von φ wenn $\psi \circ \varphi = \mathrm{im}_M$.

Wir bemerken, dass

(1) φ hat ein Schnitt $\Rightarrow$ φ ist surjektiv.
(2) φ hat ein Retraktion $\Rightarrow$ φ ist injektiv.

Bemerkung. Die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist surjektiv, aber hat keinen Schnitt.

Der $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, der n auf $2n$ sendet, ist injektiv, aber hat keine Retraktion.

Lemma 66. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von A-Moduln. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:

(1) *φ hat ein Retraktion;*
(2) *ψ hat ein Schnitt.*

In diesem Falle, sagt man, dass die exakte Folge zerfällt, und haben ein Isomorphismus $\tau\colon M \to M' \oplus M''$, so dass $\tau^{-1}|_{M'} = \varphi$ und $\pi_2 \circ \tau = \psi$, wo $\pi_2\colon M' \oplus M'' \to M''$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist.

Lemma 67 (Schlangenlemma)**.** *Sei*

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\psi'"] & N \arrow[r, "\psi''"] & N'' & \end{tikzcd}$$

ein kommutative Diagramm von A-Modulhomomorphismen, wo beide Reihen exakten Folgen sind.

Es existiert eine kanonische Exakte Folge

$$\mathrm{Ker}(f') \xrightarrow{\overline{\varphi}'} \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\overline{\varphi}''} \mathrm{Ker}(f'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(f') \xrightarrow{\overline{\psi}'} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\overline{\psi}''} \mathrm{Coker}(f'')$$

wo $\overline{\varphi}'$, $\overline{\varphi}''$ Einschränkungen von φ', φ'' sind und wo $\overline{\psi}'$, $\overline{\psi}''$ induziert von ψ', ψ'' sind.

Folgerung 68 (Fünflemma)**.** *Sei*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d] & N_2 \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d] & N_3 \arrow[r, "\psi_3"] & N_4 \arrow[r, "\psi_4"] \arrow[d] & N_5 \\ 0 & 0 & & 0 & \end{tikzcd}$$

ein Diagramm von A-Modulhomomorphismen, wo jede Sequenz exakt ist. Dann ist φ_3 ein Isomorphismus.

3.5. Ist $\prod_{i\in\mathbb{N}} A$ ein freier A-Modul?

Bemerkung. Wenn A ein Körper ist, ist jede A-Modul frei (es ist ein Vektorraum). Dann ist $\prod_{i\in\mathbb{N}} A$ frei (z.B. wenn $A=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Die Dimension ist aber überabzählbar.

Satz 69. *Der $\mathbb{Z}$-Modul $\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$-Modul.*

3.6. Projektive Moduln.

Definition. Sei A ein Ring. Ein A-Modul P heisst projektiv, falls für jede exakte Folge $N\to N'\to 0$ gilt: $\mathrm{Hom}(P,N)\to\mathrm{Hom}(P,N')\to 0$ exakt ist.

Satz 70. *Sei A ein Ring und P ein A-Modul. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *P ist projektiv (als A-Modul).*
(2) *Für jeder surjektive A-Modulhomomorphismus $\nu\colon N\to N'$, jeder A-Modulhomomorphismus $\mu\colon P\to N'$ liftet sich zu einem A-Modulhomomorphismus $\hat\mu\colon P\to N$ (so dass $\nu\circ\hat\mu=\mu$).*
(3) *Jede exakte Folge $0\longrightarrow N'\longrightarrow N\longrightarrow P\longrightarrow 0$ zerfällt.*
(4) *P ist ein Faktor eines freien A-Moduls L, d.h. $L\cong P\oplus M$ für ein A-Modul M.*

Beispiel. Jeder freier Modul ist projektiv.

Sei $A=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $M=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, der ein A-Modul ist, durch $a\cdot m=am$. Wir bemerken, dass M projektiv aber nicht frei ist.

1) M ist projektiv, weil $M\oplus\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=A$ frei ist.

2) M ist nicht frei als A-Modul: jedes Element $b\in M$ ist so dass $2b=0$, wo $2\in A$.

Wir möchten sehen, dass jeder projektive A-Modul P frei ist, wenn A ein Hauptidealring ist. Nach Satz 70 ist P ein Faktor eines freien Moduls. Wenn dieser Modul endlich ist, kann man Folgerung 57 benützen. In allgemeinen brauchen wir:

Lemma 71. *Sei A ein Hauptidealring und F ein freier A-Modul. Jeder Untermodul $M\subset F$ ist frei.*

Folgerung 72. *Wenn A ein Hauptidealring ist und P ein A-Modul ist, gilt:*

$$P \text{ projektiv} \Leftrightarrow P \text{ frei}$$

Satz 73. *Sei A ein lokaler Ring, mit Maximalideal $\mathfrak{m}$, und P,Q zwei projektive endliche A-Moduln.*

Für jede $A/\mathfrak{m}$-Modulhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon P/\mathfrak{m}P\to Q/\mathfrak{m}Q$ gibt es ein A-Modulhomomorphismus $\varphi\colon P\to Q$, so dass das folgende Diagramm (in dem π_P,π_Q die kanonische Abbildungen sind) kommutiert

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_P"] & Q \arrow[d, "\pi_Q"] \\ P/\mathfrak{m}P \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & Q/\mathfrak{m}Q. \end{tikzcd}$$

Wenn $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus ist, ist auch φ ein Isomorphismus.

Folgerung 74. *Sei A ein lokaler Ring. Jeder projektiver endlicher A-Modul ist frei.*

3.7. Injektive Moduln.

Definition. Sei A ein Ring. Ein A-Modul I heisst injektiv, falls für jede exakte Folge $0\to N\to N'$ gilt: $\mathrm{Hom}(N',I)\to\mathrm{Hom}(N,I)\to 0$ exakt ist.

Satz 75. *Sei A ein Ring und I ein A-Modul. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *I ist injektiv (als A-Modul).*
(2) *Für jedes A-Modul M und jeder Untermodul N, jeder A-Modulhomomorphismus $\mu\colon N\to I$ lässt sich zu einen A-Modulhomomorphismus $\hat\mu\colon M\to I$ forsetzten (so dass $\hat\mu|_N=\mu$).*
(3) *Jede exakte Folge $0\longrightarrow I\longrightarrow M\longrightarrow M'\longrightarrow 0$ zerfällt.*

(4) *Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, jeder A-Modulhomomorphismus $\mathfrak{a} \to I$ lässt sich zu A forsetzten.*

Bemerkung. 1) $\mathbb{Q}$ ist ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul: für jedes Ideal $m\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$, jeder $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ lässt sich zu $\mathbb{Q}$ fortsetzen.

2) $\mathbb{Z}$ ist kein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul. Die Abbildung $2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die $2m$ auf m sendet lässt sich nicth zu $\mathbb{Z}$ fortsetzen.

Lemma 76. *Sei A ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Folge von A-Moduln. Die folgende Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *M_i ist injektiv, für jedes $i \in I$*
(2) *$\prod_{i\in I} M_i$ ist injektiv*

Bemerkung. M_i ist injektiv, für jedes $i \in I$ impliziert nicht, dass $\bigoplus_{i\in I} M_i$ injektiv ist. Wir werden sehen, dass es richtig ist, genau wenn A ein noetherscher Ring ist.

Definition. Sei A ein Integritätsring und M ein A-Modul.

Man sagt, dass M teilbar ist, wenn

$$\forall m \in M \forall a \in A\backslash\{0\}, \exists n \in M \text{ mit } na = m.$$

Man sagt, dass M torsionsfrei ist, wenn $am \neq 0$ für jedes $a \in A\backslash\{0\}, m \in M\backslash\{0\}$.

Lemma 77. *Sei A ein Integritätsring und M ein A-Modul. Es gilt:*

(1) *M injektiv $\Rightarrow$ M teilbar;*
(2) *M teilbar und torsionsfrei $\Rightarrow$ M injektiv.*

Bemerkung. Für jedes Integritätsring A, ist sein Quotientskörper $Q(A)$ eine injektive A-Modul ist.

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is eine injektive $\mathbb{Z}$-Modul, der nicht torsionsfrei ist.

Es gibt teilbar A-Moduln die nicht injektiv sind.

Lemma 78. *Sei A ein Hauptidealring und M ein A-Modul.*

$$M \text{ injektiv} \Leftrightarrow M \text{ teilbar.}$$

Folgerung 79. *Sei A ein Hauptidealring. Jeder Faktormodul eines injektives A-Modul ist injektiv.*

Bemerkung. Folgerung 79 ist falsch für ein allgemeines Ring.

Beispiel. Sei $A = \mathbb{Q}[x, y]$ und $M = \mathbb{Q}(x, y)$, der ist teilbar. Sei $N \subset M$ der Untermodul $xy\mathbb{Q}[x, y]$. Der Modul M/N ist teilbar weil M ist. Er ist aber nicht injektiv. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ das Ideal $(x, y) = xA + yA$. Wir definieren $\varphi\colon \mathfrak{a} \to M/N$ als $\varphi(P) = [P(0, y)]$. Est ist klar, dass $\varphi(P + P') = \varphi(P) + \varphi(P')$. Für $Q \in A$ beweisen, dass $\varphi(QP) = [Q(0, y) \cdot P(0, y)] = Q[P(0, y)]$ weil $Q - Q(0, y) \in x \cdot \mathbb{Q}[x, y]$ und $P(0, y)] \in y \cdot \mathbb{Q}[x, y]$. φ ist dann ein A-Modulhomomorphismus $\mathfrak{a} \to M/N$ und es gibt kein A-Modulhomomorphismus $\hat{\varphi}\colon A \to M/N$ so dass $\varphi = \hat{\varphi}|_{\mathfrak{a}}$.

3.8. **Noethersche Moduln.**

Definition. Ein A-Modul M heisst noethersch, wenn jede aufsteigende Folge von Untermoduln $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ von M stationär wird. (d.h. $\exists n \in N$ mit $M_n = M_{n+1} = \dots$).

Ein Ring A heisst noethersch wenn er als Modul über sich selbst noethersch ist.

Beispiel. $\mathbb{Z}$ ist ein noetherscher Ring.

$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, \dots]$ ist kein noetherscher Ring.

Man wird sehen, dass $\mathbb{Z}^n$ ein noetherscher $\mathbb{Z}$-Modul ist, und dass $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ ein noetherscher Ring ist.

Satz 80. *Sei A ein Ring und M ein A-Modul.*

$$M \text{ ist noethersch} \Leftrightarrow \text{Jeder Untermodul (insbesondere } M \text{ selbst) ist endlich.}$$

Folgerung 81. *Jeder Hauptidealring ist noethersch.*

Satz 82. *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von A-Modul. Es folgt:

$$M \text{ ist noethersch} \Leftrightarrow M', M'' \text{ sind noethersch.}$$

Folgerung 83. *Sei A ein Noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann sind $\mathfrak{a}$ und $A/\mathfrak{a}$ ein noetherschen A-Moduln.*

Folgerung 84. *Seien $M_1, \ldots, M_n$ noethersche A-Moduln, so ist auch $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ noethersch. Insbesondere ist A^n ein noetherscher A-Modul wenn A ein Noetherscher Ring ist.*

Satz 85 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Wenn A ein noetherscher Ring, ist auch der Polynomring $A[x]$ ein noetherscher Ring.*

Folgerung 86. *Sei A ein noetherscher Ring, und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $A[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist $A[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$ ein noetherscher Ring.*

Folgerung 87. *Sei A noetherscher Ring, $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, derart dass B von $\varphi(A)$ und einer endlicher Menge erzeugt ist. Dann ist B ein noetherscher Ring.*

3.9. **Das Tensorprodukt.**

Definition. Sei A ein Ring, M, N, R A-Moduln. Eine Abbildung $\varphi\colon M \times N \to R$ heisst A-bilinear (oder bilinear wenn A implizit ist) wenn

$$\begin{aligned} \varphi(m, n + n') &= \varphi(m, n) + \varphi(m, n') \\ \varphi(m + m', n) &= \varphi(m, n) + \varphi(m', n) \\ \varphi(m, an) &= a\varphi(m, n) \\ \varphi(am, n) &= a\varphi(m, n) \end{aligned}$$

für alle $m, m' \in M, n, n' \in N$, $a \in A$.

Bemerkung. $\varphi\colon M \times N \to R$ ist bilinear genau wenn $\varphi(m, -)\colon N \to R$ und $\varphi(-, n)\colon M \to R$ A-Modulhomomorphismus sind, für jedes $m \in M$, $n \in N$.

$\varphi\colon M \times N \to R$ bilinear ist nicht äquivalent zu sagen, dass φ ein A-Modulhomomorphismus ist.

Definition. Sei A ein Ring und M, N zwei A-Moduln. Ein Tensorprodukt von M und N ist ein A-Modul $M \otimes_A N$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung (genannt universell) $\tau\colon M \times N \to M \otimes_A N$ derart, dass folgende „universelle“ Eigenschaft gilt: Für jede bilineare Abbildung $\varphi\colon M \times N \to R$ gibt es genau einen Homomorphismus $\alpha\colon M \otimes_A N \to R$, so dass $\alpha \circ \tau = \varphi$.

Satz 88. *Sei A ein Ring und M, N zwei A-Moduln. Seien $M \otimes_A N$ und $M \otimes'_A N$ zwei Tensorprodukten mit universellen bilinear Abbildungen $\tau\colon M \times N \to M \otimes_A N$ und $\tau'\colon M \times N \to M \otimes'_A N$. Es gibt genau ein A-Modulhomomorphismus $\mu\colon M \otimes_A N \to M \otimes'_A N$, so dass $\mu \circ \tau = \tau'$. Diese ist ein Isomorphismus.*

Das Tensorprodukt ist damit eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus.

Konstruktion „des“ Tensorproduktes. Sei A ein Ring, M, N zwei A-Moduln. Sei $A^{(M \times N)}$ der freier A-Modul mit Basis $M \times N$, und $U \subset A^{(M \times N)}$ der Untermodul erzeugt von allen Element dieser Gestalt:

$$\begin{gathered} (m + m', n) - (m, n) - (m', n) \\ (m, n + n') - (m, n) - (m, n') \\ (m, an) - a(m, n) \\ (am, n) - a(m, n) \end{gathered}$$

wobei $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $a \in A$ sind. Wir definieren $\tau\colon M \times N \to A^{(M \times N)}/U$ als $\tau(m, n) = [(m, n)]$.

Satz 89. *Der A-Modul $A^{(M \times N)}/U$ zusammen mit der Abbildung $\tau\colon M \times N \to A^{(M \times N)}/U$ bilden ein Tensorprodukt für M und N.*

In $M \otimes_A N$ wird das Bild von (m,n) durch $m \otimes n$ gesschrieben sein.

Bemerkung. Jedes Element von $A^{M\times N}$ die Gestalt $\sum_{i=1}^r a_i(m_i,n_i)$ hat, wo $m_i \in M, n_i \in N, a_i \in A$. Es folgt von Satz 89, dass jedes Element von $M \otimes_A N$ die Gestalt

$$\sum_{i=1}^r a_i(m_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^r (a_i m_i) \otimes n_i = \sum_{i=1}^r m_i \otimes (a_i n_i)$$

hat, wo $m_i \in M, n_i \in N, a_i \in A$, also die Gestalt

$$\sum_{i=1}^r (m_i \otimes n_i)$$

wo $m_i \in M, n_i \in N$. Diese Darstellung ist aber nicht eindeutig!

Bemerkung.
(1) Wie kann man beweisen, dass $\sum_{i=1}^r (m_i \otimes n_i) = \sum_{i=1}^r (m'_i \otimes n'_i)$?
Mit den Regeln

$$m \otimes (n+n') = m \otimes n + m \otimes n'$$
$$(m+m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$$
$$am \otimes n = m \otimes an$$

(2) Wie kann man beweisen, dass $\sum_{i=1}^r (m_i \otimes n_i) \neq \sum_{i=1}^r (m'_i \otimes n'_i)$?
Man gebe eine bilineare Abbildung $\varphi\colon M \times N \to R$, wo R ist ein A-Modul, so dass

$$\sum_{i=1}^r \varphi(m_i,n_i) \neq \sum_{i=1}^r \varphi(m'_i,n'_i)$$

Lemma 90. *Sei A ein Ring. Für jedes A Modul M ist die Abbildung $\psi\colon M \to A \otimes_A M$, die durch $\psi(m) = 1 \otimes m$ definiert ist ein Isomorphismus von A-Moduln.*

Lemma 91. *Seien A, B zwei Ringen, und $\psi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Sei P ein A-Modul und M, N zwei B-Moduln.*
M, N sind A-Modul via $am = \psi(a)m$ und $an = \psi(a)n$ für $a \in A, m \in M, n \in N$.
$\mathrm{Hom}_A(N,P)$ und $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$ sind B-Moduln via $b\psi(x) = \psi(bx)$.
Wir haben dann einen kanonischen Isomorphismus von B-Moduln

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}_A(M \otimes_B N, P) \to \mathrm{Hom}_B(M, \mathrm{Hom}_A(N,P))$$

Folgerung 92. *Sei A ein Ring, M, N, P A-Moduln. Es gilt einen kanonischen Isomorphismus von A-Moduln*

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \to \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P))$$

Lemma 93. *Sei A ein Ring, $\psi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und J ein injektiver A-Modul.*
Der B-Modul

$$I = \mathrm{Hom}_A(B,J)$$

ist ein injektiver B-Modul.

Lemma 94. *Sei A ein Ring und M, N, P drei A-Moduln. Es gibt kanonischen Isomorphismen*

1. $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$ *(Kommutativität)*
2. $M \otimes_A (N \otimes_A P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_A P$ *(Assoziativität)*
3. $(M \oplus N) \otimes_A P \cong (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P)$ *(Distributivität)*

Bemerkung. Sei A ein Ring, $\varphi\colon M \to M'$ ein A-Modulhomomorphismus. Für jedes A-Modul N induziert φ ein A-Modulhomomorphismus

$$\begin{array}{rrcl} \varphi \otimes \mathrm{id}\colon & M \otimes_A N & \to & M' \otimes_A N \\ & m \otimes n & \mapsto & \varphi(m) \otimes n \end{array}$$

Lemma 95. *Sei A ein Ring, und $\varphi\colon M' \to M$, $\psi\colon M \to M''$ zwei A-Modulhomomorphismen. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *Die Folge*
$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$
ist exakt.

(2) *Für jede A-Modul N ist die induzierte Folge*
$$M' \otimes_A N \xrightarrow{\varphi\otimes\mathrm{id}} M \otimes_A N \xrightarrow{\psi\otimes\mathrm{id}} M \otimes_A N \longrightarrow 0$$
exakt.

Lemma 96. *Sei A ein Ring und M, N zwei freien Moduln mit Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Der A-Modul $M \otimes_A N$ ist frei mit Basis $\{m \otimes n \mid m \in \mathcal{B}, n \in \mathcal{C}\}$.*

Folgerung 97. *Sei A ein Ring. $A^m \otimes A^n \cong A^{m\cdot n}$.*

Lemma 98. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Es gilt*
$$(A/\mathfrak{a}) \otimes_A M \cong (M/\mathfrak{a}M).$$

Lemma 99. *Sei A ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Folge von A-Moduln. Es gilt*
$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \cong \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_A N)$$

Satz 100. *Projektive Moduln sind flach*

Lemma 101. *Seien E, F flache A-Moduln. Dann ist $E \otimes_A F$ flach.*

3.10. **Injektive Moduln und noethersche Ringen.**

Lemma 102. *Sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Es existiert ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $M \to I$, wo I ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist.*

Lemma 103. *Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Es existiert ein injektiver A-Modulhomomorphismus $M \to I$, wo I ein injektiver A-Modul ist.*

Satz 104. *Sei A ein Ring. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(1) *Für jede Folge $(M_i)_{i\in I}$ von injektive A-Moduln ist $\bigoplus_{i\in I} M_i$ injektiv;*

(2) *A ist noethersch.*