Übungen - Blatt 9

→ 21.11.2011

Aufgabe 1

(1) Finden Sie einen Ring A und eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

von A-Moduln, so dass

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,M') \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}(N,M) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}(N,M'') \longrightarrow 0$$

keine exakte Sequenz ist.

(2) Finden Sie einen Ring A und eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

von A-Moduln, so dass

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M'',N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}(M,N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}(M',N) \longrightarrow 0$$

keine exakte Sequenz ist.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $M = M_1 \oplus M_2$, wo M_1, M_2 zwei A-Moduln sind. Beweisen Sie, dass $M/\mathfrak{a}M \cong M_1/\mathfrak{a}M_1 \oplus M_2/\mathfrak{a}M_2$.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, M ein endlicher A-Modul und $\varphi\colon M \to A^n$ ein surjektiver A-Modulhomomorphismus. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ein endlicher A-Modul ist.

Aufgabe 4

Sei A ein Integritätsring und M ein A-Modul. Man sagt, dass $x \in M$ ein Torsionselement ist, wenn $\mathrm{Ann}(x) = \{a \in A \mid ax = 0\}$ nicht null ist. Die Torsion von M ist die Menge $\mathrm{Tor}(M)$ von Torsionselementen von M.

1. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Tor}(M)$ ein Untermodul von M ist.

2. Beweisen Sie, dass für jeden A-Modulhomomorphismus $\varphi\colon M \to N$, die Einschränkung von φ einen A-Modulhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon \mathrm{Tor}(M) \to \mathrm{Tor}(N)$ induziert.

3. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Tor}(-)$ linksexakt ist. Das bedeutet, dass für jede exakte Folge von A-Moduln
$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} M''$$
die Folge
$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(M') \longrightarrow \mathrm{Tor}(M) \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mathrm{Tor}(M'')$$
wieder exakt ist.

4. Ist $\mathrm{Tor}(-)$ rechtsexakt? d.h. wenn φ surjektiv ist, ist auch $\overline{\varphi}$ surjektiv?