Übungen - Blatt 8

→ 14.11.2011

Aufgabe 1

Sei A ein Ring.

1. Für jede A-Moduln M und N_i ($i \in I$), beweisen Sie, dass $\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(M, N_i)$ isomorph zu ein Untermodul von $\mathrm{Hom}(M, \bigoplus_{i\in I} N_i)$ ist.
2. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Hom}(M, \bigoplus_{i\in I} N_i)$ und $\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(M, N_i)$ nicht immer isomorph sind.
3. Was können wir sagen, wenn M ein endlicher A-Modul ist?

Aufgabe 2

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal.

1. Wenn $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal ist (d.h. $\mathfrak{a} = (x)$ für ein Element $x \in A$), beweisen Sie, dass
$$\mathfrak{a}M = \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}.$$
2. Wenn $m_1, \ldots, m_k$ ein Erzeugendensystem von M ist, beweisen Sie, dass
$$\mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i m_i \;\middle|\; a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{a} \right\}.$$
3. Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathfrak{a}M \neq \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}$.

   Tipp: Nehmen Sie z.B. $A = \mathbb{C}[x,y]$, $\mathfrak{a} = (x) + (y)$, $M = A \times A$ und beweisen Sie, dass $(x,y) \in \mathfrak{a}M \setminus \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}$.

Aufgabe 3

Sei A ein Hauptidealring und $Q(A)$ sein Quotientkörper. Beweisen Sie, dass $Q(A)$ ein unendlicher A-Modul ist, wenn $A \neq Q(A)$.

Tipp: Nehmen Sie $B = A_{\mathfrak{p}}$, wo $\mathfrak{p} = pA$, für $p \in A$ ein Primelement, und beweisen Sie, dass $Q(A)$ ein unendlicher B-Modul ist.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so dass $\mathfrak{a}M = M$.

1. Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathfrak{a}M \neq \{am \mid a \in \mathfrak{a}, m \in M\}$.

   Tipp: Es ist möglich, wie in Aufgabe 2 zu argumentieren. Nehmen Sie z.B. $A = \mathbb{C}[x,y]$, $\mathfrak{a} = (x) + (y)$, $M = S_x^{-1}A \times S_y^{-1}A$, *wo* $S_x = \{x^i \mid i \geq 0\}$, $S_y = \{y^i \mid i \geq 0\}$, .

2. Finden Sie ein Beispiel, wo $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Jac}(A)$ und $M \neq \{0\}$. (M muss unendlich sein, nach Lemma von Nakayama).

   Tipp: Es ist möglich, Aufgabe 3 *zu benützen.*

3. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Nil}(A)$, $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt $\Rightarrow M = 0$.

4. * Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Nil}(A) \not\Rightarrow M = 0$.

Aufgabe 5

Gibt es $\mathbb{Z}$-Ringhomomorphismen φ, ψ, so dass die folgenden exakten Sequenzen sind?
(Das meint: so dass φ injektiv ist, ψ surjektiv ist, und $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$)

1. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

2. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

3. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

4. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow 0$$

5. $$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

6. $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$