Übungen - Blatt 7

→ 7.11.2011

Aufgabe 1

Sei M ein A-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul. Beweisen Sie, dass die kanonische Abbildung $\pi\colon M \to M/N$ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Untermoduln von } M, \\ \text{die } N \text{ enthalten} \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{Untermoduln} \\ \text{von } M/N \end{array} \right\} \\ E & \mapsto & \pi(E) \\ \pi^{-1}(F) & \leftarrow & F \end{array}$$

induziert.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Seien N, P zwei Untermoduln von M.

1. Beweisen Sie, dass $\operatorname{Ann}(P+N) = \operatorname{Ann}(P) \cap \operatorname{Ann}(N)$.
2. Beweisen Sie, dass $(N : P) = \{a \in A \mid aP \subset N\}$ ein Ideal von A ist, so dass $(N : P) = \operatorname{Ann}((N+P)/N)$.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\varphi\colon M \to M$ ein A-Modulhomomorphismus.
Zeigen Sie, dass M ein $A[X]$-Modul ist, wobei die Struktur wie folgt definiert ist:

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i X^i \right) \cdot m = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi^i(m),$$

für $m \in M$ und $\sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in A[X]$ (jedes a_i liegt in A),
wobei $\varphi^i = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{i \text{ mal}}$ und φ^0 die Identität ist.

Aufgabe 4

Sei A ein Hauptidealring, und sei M ein endlicher A-Modul, so dass $\mathrm{Ann}(m) = \{0\}$ für jedes $m \in M \setminus \{0\}$ (man sagt, dass M torsionsfrei ist).
Zeigen Sie, dass M frei ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass M ein maximaler freier Untermodul $L \subset M$ enthält. Beweisen Sie dann, dass $aM \subset L$ für ein $a \in A \setminus \{0\}$.

Aufgabe 5

1. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so dass $\mathfrak{a} \neq 0$. Beweisen Sie, dass $A/\mathfrak{a}$ kein freier A-Modul ist.

2. Finden Sie einen Ring A und einen endlichen A-Modul M, der ein unendlicher A-Untermodul N enthält.

   Tipp: A muss kein Hauptidealring sein. Es ist möglich $M = A$ zu wählen.