Übungen - Blatt 6

→ 31.10.2011

Aufgabe 1

Sei A ein Ring, und $\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ zwei Primidealen von A mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Man definiert $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ als die Menge $\{[x] \in A/\mathfrak{p} \mid x \in \mathfrak{q}\}$. Bemerken Sie, dass $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ ein Primideal von $A/\mathfrak{q}$ ist, und zeichen Sie, dass $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}/\mathfrak{p}}$ isomorph zu $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ ist.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring und $S \subset A$ eine multiplikative Menge. Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{Nil}(S^{-1}A) = S^{-1}\mathrm{Nil}(A).$$

Aufgabe 3

Sei A ein Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. A ist reduziert;
2. $A_{\mathfrak{p}}$ ist reduziert, für jede Primideal $\mathfrak{p} \subset A$.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq A$ heisst primär wenn $ab \in \mathfrak{a}, a \notin \mathfrak{a} \Rightarrow b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, für jede $a,b \in A$.

1. Beweisen Sie, dass jede Primideal primär ist.
2. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) $\mathfrak{q}$ ist primär;
   (b) $\mathrm{Nil}(A/\mathfrak{q}) = \mathrm{NT}(A/\mathfrak{q})$.

   (Es gibt einen neuen Beweis zu (1)).
3. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{m}^k$ primär ist, für jede $k \geq 1$.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring.

1. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein Primärideal. Beweisen Sie, dass $\sqrt{\mathfrak{q}}$ prim ist.
2. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal, so dass $\sqrt{\mathfrak{q}}$ maximal ist. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{q}$ primär ist.
3. Sei K ein Körper, $A = K[x,y]$ und $\mathfrak{a} = (x, y^2) \subset A$. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{a}$ primär ist, und berechnen Sie $\sqrt{\mathfrak{q}}$. Zeigen Sie, dass ein Primärideal nicht immer ein Potenz von ein Primideal ist.
4. Sei $\mathfrak{q} \subset A$ ein Ideal, so dass $\sqrt{\mathfrak{q}}$ prim ist. Ist immer $\mathfrak{q}$ primär ?