Übungen - Blatt 5

→ 24.10.2011

Aufgabe 1

Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\}$ ein Hauptidealring ist, mit nur ein Primelement (bis auf Assoziertheit).

Aufgabe 2

Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge und $\mathfrak{a}$ ein Ideal. Man schreibt $S' = \{[s] \mid s \in S\} \subset A/\mathfrak{a}$. Beweisen Sie, dass $(S')^{-1}(A/\mathfrak{a})$ und $(S^{-1}A)/(S^{-1}\mathfrak{a})$ isomorph sind.

Aufgabe 3

Sei A ein lokaler Hauptidealring, mit Maximalideal $\mathfrak{m}$.

1. Beweisen Sie, dass $\forall a \in A, a \neq 0, \exists n \in \mathbb{N}$ mit $a \in \mathfrak{m}^n$, $a \notin \mathfrak{m}^{n+1}$ (dabei ist $\mathfrak{m}^0 = A$, $\mathfrak{m}^1 = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^{k+1} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^k$). Man schreibt $\nu(a) = n$ und $\nu(0) = \infty$.
2. Beweisen Sie, dass ν, via $\nu(\frac{a}{b}) = \nu(a) - \nu(b)$, eine Valuation auf dem Quotientenkörper $Q(A)$ induziert.

   Eine Valuation ist eine Funktion $\nu \colon Q(A) \to \mathbb{Z} \cup \infty$ mit $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, $\nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$.
3. Beweisen Sie, dass $\nu^{-1}(\mathbb{N}) = A$.

Aufgabe 4

Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $S \subset A$ die multiplikative Menge $\{[n^k] \in A \mid k = 1, 2, \dots\}$. Zu was ist $S^{-1}A$ isomorph, wenn

1. $m = 6$, $n = 2$;
2. $m = 8$, $n = 2$;
3. $m = 9$, $n = 4$?

Aufgabe 5

Sei A ein reduzierter Ring (d.h. $\mathrm{Nil}(A) = 0$), der nur endlich viele minimale Primideale, $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$, besitzt. Sei S die Menge seiner Nichtnullteiler.

Zeigen Sie, dass $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ und $S^{-1}A \cong \prod_{i=1}^{n} Q(A/\mathfrak{p}_i)$.