Übungen - Blatt 4

→ 17.10.2011

Aufgabe 1

Sei K ein Körper und sei $K[X_1,\dots,X_n]$ der Ring der Polynome in n Variablen mit Koeffizienten aus K.

1. Sei $f \in K[X_1,\dots,X_n]\setminus\{0\}$ Beweisen Sie dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (a) f ist irreduzibel;
   (b) (f) ist ein Primideal.
2. Sind die folgenden Ringe integer? Sind sie Körper?
   (a) $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1)$
   (b) $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2)$
   (c) $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2)$
   (d) $\mathbb{F}_p[x,y]/(x^2+y^2)$
   (e) $K[x,y,z]/(x^p+y^p+z^p+1)$

   (In (d) und (e) ist p eine Primzahl und K ist ein beliebiger Körper).

   Tipp: In (e) ist die Antwort abhängig von $\mathrm{char}(K)$.

Aufgabe 2

Finden Sie Primideale $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in I}$ für die folgenden Ringe A, so dass $\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{p}_i$.

1. $A = \mathbb{Z}$;
2. $A = \mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$;
3. $A = \mathbb{R}[X,Y]$;
4. $A = \mathbb{C}[X]/(X^3)$;
5. $A = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2,(X+Y)^2)$.

Aufgabe 3

Finden Sie Primideale $\{\mathfrak{p}_i\}_{i\in I}$ für die folgenden Ringe A, so dass $NT(A) = \bigcup\limits_{i\in I} \mathfrak{p}_i$.

1. $A = \mathbb{Z}$;
2. $A = \mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$;
3. $A = \mathbb{R}[X,Y]$;
4. $A = \mathbb{C}[X]/(X^3)$;
5. $A = \mathbb{F}_p[X,Y]/(XY)$;
6. $A = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2,(X+Y)^2)$.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring und sei $S \subset A$ eine multiplikative Menge.
Wir sagen, dass zwei Elemente (a,s), (a',s') aus $A\times S$ äquivalent sind (und schreiben $(a,s)\sim(a',s')$), wenn $\exists t \in S$ mit $t(as'-a's)=0$.

1. Beweisen Sie, dass "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf $A\times S$ ist.
2. Wenn S keine Nullteiler enthält, zeige man $(a,s)\sim(a',s') \Leftrightarrow as' = a's$.
3. Beweisen Sie, dass $(a,s)\sim(a',s') \Leftrightarrow as'=a's$ im Allgemeinen keine Äquivalenzrelation auf $A\times S$ darstellt.

Aufgabe 5

Sei A ein Ring und sei S eine multiplikative Menge mit $1\in S$. Es bezeichne $S^{-1}A$ die Menge der Äquivalenzklassen von $A\times S$ nach "$\sim$". Die Äquivalenzklasse von (a,s) wird als $\frac{a}{s}$ geschrieben. Beweisen Sie, dass $S^{-1}A$ ein Ring ist, wobei $\frac{0}{1}$ das Null- und $\frac{1}{1}$ das Einselement ist, und wobei $\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}=\frac{as'+a's}{ss'}$, $\frac{a}{s}\cdot\frac{a'}{s'}=\frac{aa'}{ss'}$.

Aufgabe 6* (fakultativ)

Sei A ein Ring, und sei $e\in A$ ein idempotentes Element ($e^2=e$).
Zu zeigen:

1. Es gibt Ringe A_1, A_2 und einen Isomorphismus $\varphi\colon A\to A_1\times A_2$ mit $\varphi(e)=(1,0)$.
2. Bis auf Isomorphie sind A_1 und A_2 eindeutig bestimmt.
3. Was geschieht in den Fällen $e=1$ bzw. $e=0$?
4. Wann sind A_1, A_2 nicht zum Nullring isomorph?