Übungen - Blatt 3

→ 10.10.2011

Aufgabe 1

Sei A ein Ring mit $A \neq \{0\}$.
Zeigen Sie für jedes $a \in A$, dass $A[X]/(X-a)$ isomorph zu A ist. (A ist vielleicht nicht Euklidisch).
Tipp: Zeigen Sie dies zuerst für $a = 0$ und benützen Sie dann, dass der Ringhomomorphismus $A[X] \to A[X]$, der $P(X)$ auf $P(X-a)$ sendet, ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2

Sei K ein Körper. Wir studieren den Ring $K[X]$ der Polynome mit Koeffizienten aus K.

1. Zeigen Sie, dass $(K[X])^* = K^*$.
2. Man sagt, dass ein Polynom $f \in K[X] \setminus \{0\}$ irreduzibel ist, wenn keine $g, h \in K[X] \setminus K^*$ mit $f = gh$ existieren.
   (a) Was sind die irreduzibeln Polynome von $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{C}[X]$?
   (b) Zeigen Sie, dass ein Polynom $f \in K[X]$ von Grad 2 oder 3 irreduzibel ist, wenn es keine Wurzel in K hat. Ist dies auch wahr für den Grad 4?
3. Sei $f \in K[X]$. Zeigen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:
   (a) f ist irreduzibel;
   (b) $K[X]/(f)$ ist ein Körper.

   Tipp für $(a) \Rightarrow (b)$. Wenn $[g] \in K[X]/(f) \setminus \{0\}$, benützen Sie die Euklidische Division mit Rest und Induktion über den Grad von g, um zu zeigen, dass $[g]$ invertierbar ist.

Aufgabe 3

Sei p eine Primzahl mit $p \neq 2$. Zu zeigen:

1. -1 ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p \Leftrightarrow$ die Gruppe $(\mathbb{F}_p)^*$ enthält ein Element der Ordnung 4.
2. -1 ist ein Quadrat in $\mathbb{F}_p \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$.
3. Wenn $p \equiv 3 \pmod 4$, dann ist $\mathbb{F}_p[X]/(X^2+1)$ ein Körper mit p^2 Elementen. (*Benützen Sie Aufgabe* 2).

Aufgabe 4

Sei K ein endlicher Körper.

1. Zeigen Sie: K enthält genau p^r Elemente, wobei p die Charakteristik von K ist (die eine Primzahl ist).

   Tipp: K ist ein Vektorraum.

2. Zeigen Sie für jede Primzahl p, dass ein Polynom $f \in \mathbb{F}_p[X]$ von Grad 2 existiert, so dass $\mathbb{F}_p[X]/(f)$ ein Körper mit p^2 Elementen ist.

   Tipp: Nehmen Sie $f = X^2 + X + 1$ für $p = 2$ und $f = X^2 - a$ für $p \neq 2$.

3. Zeigen Sie für jede Primzahl p, dass zwei Körper mit p^2 Elementen isomorph sind.

   Tipp: Beweisen Sie für einen Körper K mit p^2 Elementen, dass $x \in K \backslash \mathbb{F}_p \Rightarrow x^2 + ax + b = 0$ für $a, b \in \mathbb{F}_p$; wählen Sie ein x, so dass $a = 0$ im Fall $p \neq 2$ und $a = b = 1$ im Fall $p = 2$.

Aufgabe 5

1. Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ von

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7}, \\ x &\equiv 1 \pmod{10}, \\ x &\equiv 5 \pmod{13}. \end{aligned}$$

2. Gleiche Frage für

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{8}, \\ x &\equiv 1 \pmod{3}, \\ x &\equiv 2 \pmod{4}. \end{aligned}$$

3. Für welche $a \in \{0, 1, 2\}$ gibt es eine Lösung für das folgende System?

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{12}, \\ x &\equiv 3 \pmod{8}, \\ x &\equiv a \pmod{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Sei A der Ring der $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen $]-1,1[\to \mathbb{R}$ (wobei $]-1,1[= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$). Welche dieser Mengen sind Primideale oder Maximalideale von A?

1. $\mathfrak{a} = \{f \in A \mid f(0) = 0\}$;
2. $\mathfrak{b} = \{f \in A \mid f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = 0\}$.
3. $\mathfrak{c} = \{f \in A \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.