Übungen - Blatt 2

→ 3.10.2011

Aufgabe 1

Sei A ein Ring mit $A \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. A ist ein Körper;
2. Die einzigen Ideale von A sind (0) und $(1) = A$.
3. Jeder Ringhomomorphismus von A auf einen Nichtnullring B ist injektiv.

Aufgabe 2

Zu welchen Ringen sind $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2-1)$ isomorph?
Zu welchem Ring ist $\mathbb{R}[X]/(f)$ isomorph, wobein f ein Polynom von Grad 2 ist?

Aufgabe 3

Sei A ein Ring mit $A \neq \{0\}$.

1. Zu zeigen: es existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \to A$.
2. Der Kern von φ ist $n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 0$. Zeigen Sie:

   $$A \text{ ist integer} \Rightarrow n = 0 \text{ oder } n \text{ ist ein Primzahl.}$$

   Man sagt, dass n die Charakteristik des Rings A ist.
3. Vergleichen Sie die Charakteristik von A mit dieser eines Unterrings $B \subset A$.
4. Was ist die Charakteristik von $\mathbb{Z}[X]/(2, X^2+3)$ und von $\mathbb{Z}[i]/(1+3i)$?

Aufgabe 4

Sei A der Ring der $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen $]-1,1[\to \mathbb{R}$ (wobei $]-1,1[= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$).
Welche dieser Mengen sind Ideale von A?

1. $I_1 = \{f \in A \mid f(0) = 1\}$;
2. $I_2 = \{f \in A \mid f^{(k)}(0) = 0, k = 0, \dots, n\}$; ($n \in \mathbb{N}$ ist fest, $f^{(k)}$ ist die k-te Ableitung von f).
3. $I_3 = \{f \in A \mid f \text{ ist beschränkt.}\}$.
4. $I_4 = \{f \in A \mid f(\frac{1}{k}) = 0 \text{ für } k = 2, 3, \dots\}$.

Aufgabe 5

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismusm zwischen zwei Ringen. Sind die folgenden Behauptungen wahr?

1. Wenn $\mathfrak{b}$ ein Primideal von B ist, dann ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Primideal von A.
2. Wenn $\mathfrak{b}$ ein maximales Ideal von B ist, dann ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{b})$ ein maximale Ideal von A.

Aufgabe 6

Sei A ein Ring und seien $a, b \in A$. Zeigen Sie, dass $(a,b) = R \Rightarrow (a^n, b^n) = R$ für alle $n \geq 1$.