Übungen - Blatt 13

→ 19.12.2011

Aufgabe 1

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring und $\psi\colon A \to B$, $\varphi\colon A \to C$ zwei Ringhomomorphismen. Wir sehen die Ringen B und C als A-Moduln durch diese Abbildungen.

1. Beweisen Sie, dass $B \otimes_A C$ ein Ringstruktur hat, so dass $(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = (bb') \otimes (cc')$ für jede $b, b' \in B$, $c, c' \in C$.

2. Seien $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ und $C = A[x_1, \ldots, x_m]$ (Ringen von Polynomen in n und m Variablen), und $\psi\colon A \to B$, $\varphi\colon A \to C$ die kanonischen Inklusionen. Beweisen Sie, dass das Ring $B \otimes_A C$ isomorph zu $A[x_1, \ldots, x_{m+n}]$ ist.

3. Seien $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ und $C = A[y_1, \ldots, y_m]$ wie in (2), und seien $f \in B$, $g \in C$ zwei Polynomen. Beweisen Sie, dass das Ring $B/(f) \otimes_A C/(g)$ isomorph zu $A[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]/(f, g)$ ist.

   Was das geometrisch meint?

Aufgabe 3

Sei A ein Ring und $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Für jedes A-Modul M ist $M \otimes_A B$ ein A-Modul, aber auch ein B-Modul, durch $b \cdot (m \otimes b') = m \otimes (bb')$.
Beweisen Sie, dass die folgenden B-Modulisomorphismen gilten:

1. $A^n \otimes_A B \cong B^n$.

2. $A[x_1, \ldots, x_n] \otimes_A B \cong B[x_1, \ldots, x_n]$.

3. $A[x_1, \ldots, x_n]/(f) \otimes_A B \cong B[x_1, \ldots, x_n]/(f)$ für jedes Polynom $f \in A[x_1, \ldots, x_n]$.

4. Was passiert un (3) für $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\varphi\colon A \to B$ die kanonische Abbildung und $f = 1 + 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_n$?

Aufgabe 4

Sei A ein Ring. Finden Sie eine exakte Folge von A-Moduln

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

und ein N-Modul, so dass

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{\varphi} M \otimes_A N \xrightarrow{\psi} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

nicht exakt ist. (Das meint, dass N nicht flach als A-Modul ist).

Aufgabe 5 (Fakultativ)

Sei $M = \bigoplus_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir definieren

$$\begin{array}{rccc} \mu\colon & M & \to & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & ([a_n])_{n=2}^{\infty} & \mapsto & \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} a_n\right] \end{array}$$

Beweisen, dass die kanonische Abbildung $\pi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ liftet sich nicht zu ein $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $M \to \mathbb{Q}$. Es folgt, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht projektiv als $\mathbb{Z}$-Modul ist (schon bemerkt in Blatt 11).