Übungen - Blatt 11

→ 5.12.2011

Aufgabe 1

Ist der A-Modul M projektiv?

1. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
2. $A = \mathbb{Z}$, $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$
3. $A = \mathbb{Z}$, $M = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$
4. $A = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
5. $A = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2

Sei A ein Ring und $(M_i)_{i \in I}$ eine Folge von A-Moduln. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist projektiv;
2. M_i ist projektiv $\forall i$.

Ist es richtig mit $\prod_{i \in I} M_i$ statt $\bigoplus_{i \in I} M_i$?

Aufgabe 3

Ist der A-Modul M injektiv?

1. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$
2. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$.
3. $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
4. $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
5. $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
6. $A = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
7. $A = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4

Sei A ein Ring und

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von A-Moduln.
Sind die folgenden Behauptungen richtig?

1. M endlich $\Rightarrow M_2$ endlich.
2. M endlich $\Rightarrow M_1$ endlich.
3. M_1 endlich $\Rightarrow M$ endlich.
4. M_2 endlich $\Rightarrow M$ endlich.
5. M_1, M_2 endlich $\Rightarrow M$ endlich.

Wass passiert wenn die Folge zerfällt?

Aufgabe 5*

Sei M der $\mathbb{Z}$-Modul $M = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$ und sei $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$, der ein Untermodul von M ist. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Hom}(M/N, \mathbb{Z}) = \{0\}$.
Tipp: Seien $A, B \subset M$ die Untermoduln $A = \{(2a_1, 2^2a_2, 2^3a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$ und $B = \{(3a_1, 3^2a_2, 3^3a_3, \dots) \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$. Für jedes $f \in \mathrm{Hom}(M/N, \mathbb{Z})$, sehen Sie dass $f(A/N) = 0$ und $f(B/N) = 0$, und bemerken Sie, dass $A + B = M$.